

Rappel de la structure : Toutes les colles de l'année commenceront par une question de cours et des exercices jusqu'à la fin de l'heure. La question de cours se décomposera en deux parties, une définition, proposition ou un théorème à énoncer puis une proposition ou un théorème à démontrer dans la liste ("Liste de questions de cours"). Dans les premières colles, nous ferons particulièrement attention à la rédaction.

chap 0 : Introduction aux mathématiques

I) Structure

- Savoir énoncer proprement une définition : TOUJOURS BIEN PRECISER OU SONT NOS OBJETS.
- Savoir énoncer proprement un théorème : TOUJOURS BIEN PRECISER OU SONT NOS OBJETS. BIEN DONNER LES HYPOTHESES. LES VERIFIER TOUTES si on doit appliquer un théorème.
- Avoir compris la différence entre une définition et un théorème.

II) Notations et symboles

- Définition notation de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ (pour les colleurs : vu rapidement), $\mathcal{F}(I, J)$ et $\mathcal{C}(I, J)$ et de $\llbracket m, n \rrbracket$.
- Définition des symboles $\implies$ et $\iff$ et du terme réciproque.
- Définition de la factorielle.
- prop : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(n+1)! = (n+1)n!$.

III) Quantificateurs

- Présentation du $\forall$, $\exists$, $\exists!$.
- SAVOIR TRADUIRE une proposition/définition à l'aide de quantificateurs et RECIPROQUEMENT. QUAND ON VOUS DEMANDE DE MONTRER QUE : $\forall x \in E \dots$
VOUS DEVEZ ABSOLUMENT COMMENCER PAR : SOIT $x \in E$, ensuite seulement vous réfléchissez (aucune excuse acceptée en cas de manquement de méthode)
- ATTENTION : Ne pas mélanger l'écriture en français et l'écriture mathématiques dans une même phrase.
- ATTENTION : On ne peut pas échanger $\forall$ et $\exists$. Le sens change. MEDITER LES EXEMPLES.
- Négation des phrases mathématiques avec $\exists$ et $\forall$.

IV) Raisonnement

- Implication : " $P \implies Q$ ".
- Savoir montrer qu'une implication est fautive en trouvant un contre-exemple.
- Equivalence
- ATTENTION : NOUS EVITERONS DE RAISONNER PAR EQUIVALENCE, nous allons privilégier au cours de cette année, le raisonnement par double implication. Car il vaut mieux écrire deux fois des choses justes, plutôt qu'une seule chose fautive!!!! On commencera par les équivalences qui nous semblent les plus simples.
- Négation de l'équivalence. Explication de la triple équivalence, etc
- Raisonnement par récurrence. (pour les colleurs : uniquement récurrence simple pour l'instant).
- Savoir l'appliquer. On fera particulièrement attention à la rédaction au début de l'hérédité.
- Exemple : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (résultat à connaître).

chap 1 : Première partie : Nombres complexes : Forme algébrique

I) Généralités

- Définition d'un nombre complexe.
- Opérations élémentaires sur les complexes (somme, produit, inverse).
- Lien avec le plan complexe. Dualité point/complexe et vecteur/complexe.
- Définition du conjugué, propriétés et explication géométrique.
- Définition du module, propriétés et explication géométrique.
- METHODE : Pour calculer un module, on passe au module au carré pour éliminer la racine carrée.
- SAVOIR manipuler, utiliser la quantité conjuguée pour déterminer la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe.
- AVOIR COMPRIS que l'on fait apparaître un module au carré quand on multiplie par la quantité conjuguée.

II) Géométrie et nombres complexes

- Définition d'une translation.
- Addition d'un complexe = effectuer une translation.
- Définition d'une boule ouverte, de la boule fermée et de la sphère de centre $A(a)$ et de rayon $R > 0$.

- Résolution géométrique de problème de distance (médiatrice et point sur un cercle).
- prop : A, B, C sont alignés ssi $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- A, B, C sont orthogonaux ssi $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- Application pour montrer qu'un triangle est rectangle.
- MULTIPLIER par $\lambda \in \mathbb{R}$ revient à effectuer une homothétie de centre O et de rapport λ .
- Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ .

III) Inégalités autour du module

Inégalité triangulaire avec son cas d'égalité.

chap 2 : Puissances et polynômes de degré 2

I) Puissances

- propriétés sur les puissances : $z^n z^m = z^{n+m}$
- Racines n^{ieme} sur $\mathbb{R}_+$. Généralisation dans le cadre des puissances du type $x^{\frac{k}{n}}$.
- Graphes des puissances entières et des racines n^{ieme} .
- Identités remarquables.
- prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z^2 = z'^2 \iff z = z' \text{ ou } z = -z'$.

II) Factorisation/Identification

- Définition d'un monôme, d'un polynôme et d'une fraction rationnelle. Définition du degré et du coefficient dominant d'un polynôme.
- GARDER LES FORMES FACTORISEES. NE PAS DEVELOPPER.
- prop : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$) et $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
On suppose que $P(\alpha) = 0$.
Alors $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ avec $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 1$
- A l'attention des colleurs : Le but de ce théorème est de l'utiliser pour les poly de degré 2 ou 3.
- SAVOIR FACTORISER un polynôme de degré 3 si on vous donne une racine ou si il y a une racine évidente.

III) Limites

- Limites en 0 et $+\infty$ d'un polynôme et des fractions rationnelles.
- En $\pm\infty$, on "prend" uniquement les termes de plus haut degré.
- En 0, on "prend" uniquement les termes de plus petit degré.
- Limite exponentielle/polynômes. Limite logarithme/puissances (et par extension polynômes).
- RETENIR : l'exponentielle est plus "fort" que les polynômes/puissances qui sont eux-mêmes plus "forts" que le logarithme.
- ATTENTION : Avant de se lancer dans des calculs compliqués, regarder si vous n'êtes pas dans un cas simple! (ie : Pas de forme indéterminée)
- Si on n'est pas dans un des cas précédents, on peut :
* Factoriser par le "terme principal" pour se ramener au cas précédent.
* Faire un changement de variable.

Liste des questions de cours :

- Énoncé et preuve de $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$ (ATTENTION : L'énoncé doit être propre! "Soit ...")
- $|zz'| = |z||z'|$ (ATTENTION : L'énoncé doit être propre! "Soit ...")
- Énoncé : Inégalité triangulaire avec son cas d'égalité. Preuve uniquement de l'inégalité.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$. (Pour les colleurs, exercice fait en cours, redonner l'énoncé).