

chap 2 : Puissances et polynômes de degré 2

I) Puissances

- propriétés sur les puissances : $z^n z^m = z^{n+m}$
- Racines n^{ieme} sur $\mathbb{R}_+$. Généralisation dans le cadre des puissances du type $x^{\frac{k}{n}}$.
- Graphes des puissances entières et des racines n^{ieme} .
- Identités remarquables.
- prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z^2 = z'^2 \iff z = z' \text{ ou } z = -z'$.

II) Factorisation/Identification

- Définition d'un monôme, d'un polynôme et d'une fraction rationnelle. Définition du degré et du coefficient dominant d'un polynôme.
- GARDER LES FORMES FACTORISEES. NE PAS DEVELOPPER.
- prop : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$) et $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
On suppose que $P(\alpha) = 0$.
Alors $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ avec $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 1$
- A l'attention des colleurs : Le but de ce théorème est de l'utiliser pour les poly de degré 2 ou 3.
- SAVOIR FACTORISER un polynôme de degré 3 si on vous donne une racine ou si il y a une racine évidente.

III) Limites

- Limites en 0 et $+\infty$ d'un polynôme et des fractions rationnelles.
- En $\pm\infty$, on "prend" uniquement les termes de plus haut degré.
- En 0, on "prend" uniquement les termes de plus petit degré.
- Limite exponentielle/polynômes. Limite logarithme/puissances (et par extension polynômes).
- RETENIR : l'exponentielle est plus "fort" que les polynômes/puissances qui sont eux-mêmes plus "forts" que le logarithme.
- ATTENTION : Avant de se lancer dans des calculs compliqués, regarder si vous n'êtes pas dans un cas simple! (ie : Pas de forme indéterminée)
- Si on n'est pas dans un des cas précédents, on peut :
* Factoriser par le "terme principal" pour se ramener au cas précédent.
* Faire un changement de variable.

IV) Polynômes de degré 2

- Mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2.
- Th : Rappel des solutions dans le cas où le polynôme est à coefficient réel.
- Etude du signe du polynôme
- Définition des racines carrées d'un nombre complexe. SAVOIR LES TROUVER en pratique.
CONNAITRE LA METHODE (les 3 équations, d'où elles viennent et savoir les utiliser)
- Racine d'un polynôme à coefficient complexe.
- ATTENTION : La distinction ne se fait plus suivant le cas $\Delta > 0, = 0$ ou < 0 , mais suivant s'il est nul ou pas.
- Un polynôme de degré 2 a toujours des solutions sur $\mathbb{C}$ (une double ou deux distinctes).
- Somme et produit des racines d'un polynôme P .
- Réciproquement : Si on connaît la somme et le produit de deux nombres, on peut les retrouver en cherchant les racines d'un polynôme de degré 2.

chap 3 : Fonctions - Généralités

I) Quelques rappels sur $\mathbb{R}$

- SAVOIR MAJORER/MINORER BRUTALEMENT un quotient de termes positifs.
- Cet encadrement est brutal, si on veut un encadrement plus fin, on utilise un tableau de variations.
- Intervalles de $\mathbb{R}$.
- Définition de la valeur absolue, encadrement, IT et son corollaire.
- Traduction géométrique de $|x|$, $|x - a|$ et $|x + a|$.
- Savoir résoudre, les égalités (ou inégalités) du type : $|x| =$ (resp $\leq$ ou $\geq$) ε avec $\varepsilon > 0$.
- SAVOIR PROUVER UNE INEGALITE du type : $f(x) \leq g(x)$ en posant une fonction auxiliaire $h(x) = f(x) - g(x)$ et en dressant son tableau de variations.

II) Généralités

- Définition d'une fonction.
- Définition image/antécédent.
ATTENTION : Tout point a une unique image. Mais un $y \in J$ peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent.
Savoir le lire sur un graphe ou un tableau de variation.

- Définition de l'ensemble de définition.
- Définition de l'image d'une fonction. Savoir la déterminer à l'aide d'un tableau de variation.
- Définition de $g \circ f$.
ATTENTION à l'ordre lorsqu'on décompose une fonction sous la forme $g \circ f$.
- ATTENTION : $g \circ f \neq f \circ g$
- Exercices sur l'ensemble de définition de $g \circ f$.
- Fonctions bornées
- Définition fonctions paires, impaires.
- Propriétés graphiques (axe de symétrie, centre de symétrie).
- Définition des fonctions T -périodique. Propriété graphique.

III) Limites

- Rappel des formes indéterminées et savoir les résoudre via les deux méthodes ci-après.
Méthode 1 : Mise en facteur du terme dominant.
Méthode 2 : Changement de variable
ATTENTION : On commencera toujours par vérifier si la limite n'est pas facile à calculer.
- Nouvelles limites à connaître : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- Interprétation géométrique de certaines limites
Asymptote horizontale si la limite en $\pm\infty$ est finie.
Asymptote verticale si la limite est infinie en $a \in \mathbb{R}$.
ATTENTION : Pour l'instant quand on a une limite infinie en $\pm\infty$, on ne sait rien en dire pour l'instant.

V) Dérivation

- TOUJOURS JUSTIFIER qu'une fonction est dérivable avant de la dériver.
- Équation de la tangente au point $x = a$: $Y = f'(a)(X - a) + f(a)$.
ATTENTION : Ne pas écrire l'équation de la tangente est : $f'(a)(X - a) + f(a)$ ou $D = f'(a)(X - a) + f(a)$ cela n'a pas de sens!!!!!! Ce n'est pas l'équation d'une droite.
- Liste de dérivées usuelles
- Opérations algébriques sur les dérivées : $(f + g)'$, $(fg)'$, $\left(\frac{1}{g}\right)'$, $\left(\frac{f}{g}\right)'$.
- Méthode de calculer pour la dérivée à trois termes ou plus.
 $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. La dérivée est tournante
- Méthode pour la dérivée de trois composées ou plus.
 $(h \circ g \circ f)'(x) = f'(x)g'(y)h'(z)$ avec $y = f(x)$ et $z = g(y) = g(f(x))$.
- SAVOIR DERIVER!!!!
- Définition d'une fonction (strictement) croissante, (strictement) décroissante et (strictement) monotone.
- Caractérisation à l'aide de la dérivée.
ATTENTION : On n'a pas défini une fonction croissante à l'aide de sa dérivée mais juste sa caractérisation.
- Définition d'une fonction majorée, minorée et bornée.
- Dérivées d'ordre supérieure.
- Notation : f'' , ..., $f^{(n)}$ et $\mathcal{C}^\infty$ (juste la définition).

Liste des questions de cours :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$. (Pour les colleurs, exercice fait en cours, redonner l'énoncé).
- Résoudre dans $\mathbb{C}$: $P(X) = X^2 + (-3 + 2i)X + 5 - i$. (Pour les colleurs : Il s'agit d'un exercice fait en cours. De plus, on pourra rappeler que $15^2 = 225$ et $17^2 = 289$).
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ (Pour les colleurs : exercice fait en cours : énoncé à redonner).
- Ensemble de définition de $a(x) = \sqrt{1 - \ln(x)}$ (Pour les colleurs : exercice faits en cours, redonner l'énoncé).
- preuve de $(fgh)'$ en admettant le résultat sur la dérivée de (fg) .