

CHAPITRE 4

CIRCUITS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Sommaire

I . Système linéaire du premier ordre	1
II . Retour sur la terminale : charge et décharge d'un condensateur	2
1 . Étude graphique	2
2 . Méthodes générales	2
3 . Étude du régime libre d'un circuit RC (décharge du condensateur)	4
4 . Réponse à un échelon de tension ou réponse indicielle	5
5 . Cas du circuit RC soumis à un échelon de tension	5
III . Bilan énergétique	6

I. Système linéaire du premier ordre

Les systèmes linéaires du premier ordre sont nombreux en physique et modélisent souvent en premier approximation le système étudié :

- En mécanique : les frottements dits visqueux peuvent être modélisés en première approximation par

$$\frac{dv}{dt} + kv = 0;$$

- En physique nucléaire : l'évolution de l'effectif d'une population d'atomes radioactifs décroît selon une loi :

$$\frac{dn}{dt} + kn = 0;$$

- En chimie : exemple

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} + k[\text{H}_2\text{O}_2] = 0.$$

L'équation différentielle du premier ordre traduit une propriété fondamentale : **les variations de la grandeur qui caractérisent le système sont liées à la valeur instantanée de cette grandeur.**

Le caractère **linéaire** de l'équation en revanche, n'est souvent qu'une *modélisation simple du problème, et non une propriété intrinsèque du système étudié*. Le modèle linéaire n'est valable qu'en première approximation. Par exemple, en mécanique, pour modéliser un frottement fluide, le modèle quadratique est souvent plus adapté. Néanmoins, dans l'état actuel de nos connaissances, la loi de décroissance d'une population radioactive est rigoureusement linéaire.

Remarque

Exemple d'équations différentielles non linéaires :

$$2\dot{f}^2 + 4f = 0; \quad \ddot{f} + \sin f = 0.$$

En électricité la charge ou la décharge d'un condensateur dans un circuit RC, ou celle d'une bobine dans un circuit RL suit une loi du premier ordre. Ces systèmes se prêtant bien à une confirmation par l'expérience des résultats de l'étude analytique : ce sont eux que nous étudierons par la suite.

II. Retour sur la terminale : charge et décharge d'un condensateur

II.1. Étude graphique

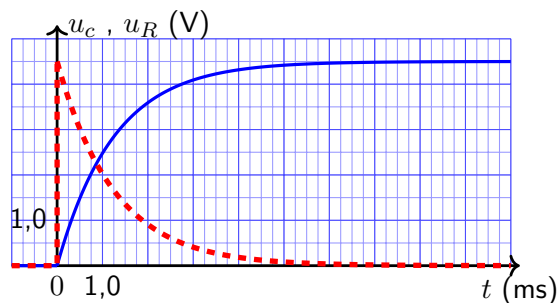
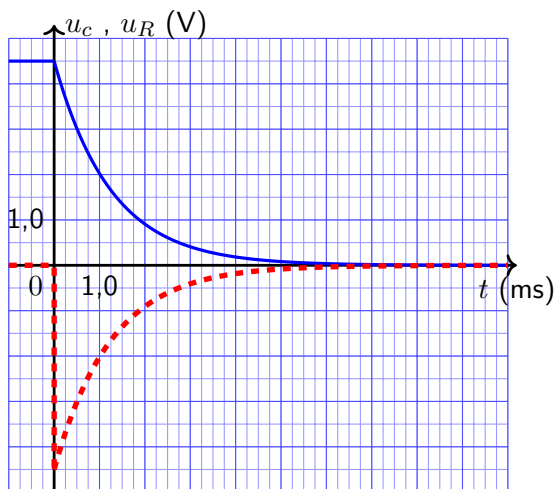
✕ Méthode Comment déterminer graphiquement τ ? ✕

- **1^{ère} méthode en utilisant la valeur de $u_c(\tau)$** : τ est la durée au bout de laquelle, le régime transitoire a eu lieu à 63 %, autrement dit il en reste 37 %.
 1. Déterminer la valeur de la tension finale $u_c(\infty)$ atteinte au bout d'un temps très long (resp. $u_c(0^+)$).
 2. Calculer $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37u_c(0^+)$).
 3. Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe $u_c(t)$ d'ordonnée $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37u_c(0^+)$).
- **2^{ème} méthode en utilisant la tangente à l'origine** :
 1. Tracer la tangente à l'origine à la courbe $u_c(t)$.
 2. Tracer l'asymptote à la courbe $u_c(t)$ (valeur atteinte pour $t \rightarrow +\infty$).
 3. L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote est τ .

Application 1 : Lectures graphiques

On donne les évolutions de la tension aux bornes du condensateur (en trait plein) et de la tension aux bornes de la résistance (en traits pointillés) au cours du temps.

1. Commenter le comportement de ces deux tensions à $t = 0$.
2. Identifier la courbe correspondant à la charge du condensateur (=réponse à un échelon de tension), et celle correspondant à la décharge (=régime libre).
3. Identifier sur chaque courbe le régime permanent initial, le régime transitoire et le régime permanent final.
4. Déterminer graphiquement le temps caractéristique du circuit.



II.2. Méthodes générales

✕ Méthode Tout exercice d'électricité doit commencer par : ✕

- la représentation du schéma du circuit étudié ;
- L'indication sur le circuit de toutes les intensités (une par branche) et tensions (une aux bornes de chaque dipôle) : flèche et nom.

II.2.a. État final

✕ Méthode Comment déterminer le régime permanent ? ✕

Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du circuit, c'est-à-dire les tensions et intensités dans le circuit une fois le nouveau régime permanent atteint.

1. Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau **régime permanent** atteint en remplaçant les **condensateurs par un interrupteur ouvert** et les **bobines par un fil**.
2. En déduire les tensions aux bornes des fils et les intensités à travers les interrupteurs ouverts qui sont nulles.
3. Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

II.2.b. Conditions initiales

✕ Méthode Comment déterminer les conditions initiales ? ✕

1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).
3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$.

II.2.c. Établir l'équation différentielle

✕ Méthode Comment établir l'équation différentielle vérifiée par la grandeur électrique s ? ✕

1. Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont du être représentées sur le circuit précédemment).
Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.
2. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
 - lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
 - lois des nœuds (attention aux redondances) ;
 - relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
3. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur électrique qui nous intéresse.
4. L'écrire sous forme canonique :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$$

avec s la grandeur électrique qui nous intéresse (une tension ou une intensité ou une charge) ;
 τ la constante de temps du circuit ;
 $s(\infty)$ la valeur qu'atteint s en régime permanent.

II.2.d. Résoudre l'équation différentielle

✕ Méthode Comment résoudre l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = B(E)$? ✕

La **solution générale** d'une telle équation différentielle s'écrit :

$$y(t) = y_H(t) + y_P$$

avec

1. y_H la **solution générale de l'équation homogène (sans second membre)** $\frac{dy_H}{dt} + \frac{y_H}{\tau} = 0$ (EH)

qui s'écrit :

$$y_H(t) = K e^{-t/\tau} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R} \text{ une constante d'intégration}$$

2. y_P une **solution particulière de (E)**, recherchée sous la forme du second membre, ici constant.

On recherche une solution y_P constante qui vérifie (E) : $0 + \frac{y_P}{\tau} = B$, soit $y_P = B\tau$.

3. Ainsi la solution générale de (E) s'écrit :

$$y(t) = y_H(t) + y_P \quad \text{soit} \quad y(t) = K e^{-t/\tau} + B\tau$$

4. Il reste à **déterminer la constante d'intégration** K à l'aide de la condition initiale $y(t=0)$.

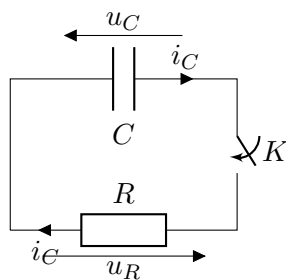
*** **Attention !** La constante d'intégration se détermine sur la solution générale de l'équation différentielle, et **jamais** sur la solution homogène.

II.3. Étude du régime libre d'un circuit RC (décharge du condensateur)

Un circuit composé d'éléments résistifs, de condensateurs ou de bobines, peut évoluer à partir d'un état initial dans lequel l'un des éléments contient une énergie emmagasinée. Si aucun générateur ne figure dans le circuit, l'évolution est dite **libre**, elle conduit généralement à une dissipation de l'énergie initiale dans les éléments résistifs, pendant une durée caractéristique notée τ .

Application 2 : Décharge d'un condensateur

Soit le circuit suivant :



Conditions initiales (CI) À $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert et le condensateur est chargé.

$$\begin{cases} u_C(t = 0^-) = E = 5 \text{ V} \\ q(t = 0^-) = C \times E \\ i(t = 0^-) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

Fig. 1 Circuit RC. $C = 1 \mu\text{F}$ et $R = 10 \text{ k}\Omega$.

À $t = 0$, on ferme K instantanément. On assiste à la décharge du condensateur dans la résistance.

- Déterminer les expressions de u_C et u_R en régime permanent.
- Quelle propriété particulière possède la tension u_C aux bornes d'un condensateur ? En déduire la valeur de $u_C(0^+)$ (juste après la fermeture de l'interrupteur). Puis en déduire celle de $q(0^+)$.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q aux bornes du condensateur.
- L'écrire sous forme canonique

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0$$

en identifiant la constante de temps τ .

- Résoudre l'équation différentielle.
- En déduire l'expression de la tension u_C et de l'intensité i_C .
- Exprimer $u_C(t = \tau)$ en fonction de E et d'un coefficient numérique. Commenter.
- Tracer l'allure de la tension u_C en fonction du temps et y indiquer les régimes transitoire et permanent. Tracer également les allures de i_C et q en fonction du temps.
- Que remarquez-vous au sujet de l'intensité i_C en $t = 0$?

Remarque

Le temps de réponse du système, c'est-à-dire la durée du régime transitoire, est conventionnellement de 4.6τ en sciences physiques. Cela correspond à $u_C(4.6\tau) = 0.01u_C(0)$: c'est le critère à 99%.

Cela est valable pour toutes les grandeurs électriques. En SI, on retient le critère de 3τ pour lequel $u_C(3\tau) = 0.05u_C(0)$: c'est le critère à 95%.

En ordre de grandeur, le temps du régime transitoire est le même.

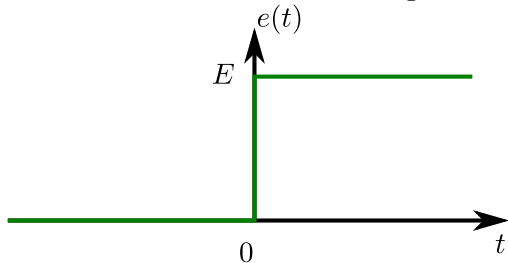
II.4. Réponse à un échelon de tension ou réponse indicielle

Nous ne traitons dans cette section que des systèmes évoluant sous l'effet d'une contrainte extérieure indépendante du temps. A l'instant zéro, la valeur de la contrainte extérieure est brutalement modifiée et le système doit s'y adapter. La période pendant laquelle le système évolue constitue le **régime transitoire**. Lorsque plus aucune grandeur ne dépend du temps, le système est en **régime permanent**.

Remarque

Lorsque la contrainte extérieure est ramenée à 0, on est en régime libre.

Un échelon de tension est un signal électrique $e(t)$ de la forme suivante :

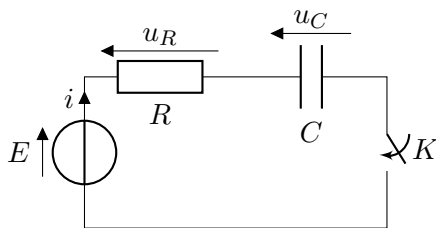


$$\begin{cases} t < 0 : e(t) = 0 \\ t \geq 0 : e(t) = E. \end{cases} \quad (4)$$

II.5. Cas du circuit RC soumis à un échelon de tension

Application 3 : Charge du condensateur

On réalise le circuit suivant :



Conditions initiales À $t = 0^-$:

$$\begin{cases} q(t = 0^-) = 0 \\ u_C(t = 0^-) = 0. \\ i(t = 0^-) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Fig. 4 Circuit RC soumis à un échelon de tension.

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le circuit RC série est alors soumis à un échelon de tension.

1. Déterminer les expressions de u_C , u_R et i une fois le nouveau régime permanent atteint.
2. Quelle propriété particulière possède la tension u_C aux bornes d'un condensateur ? En déduire la valeur de $u_C(0^+)$ (juste après la fermeture de l'interrupteur). Puis en déduire celle de $q(0^+)$.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C .
4. L'exprimer sous la forme canonique

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{u_C + \infty}{\tau}$$

en exprimant les constantes τ et $u_C(+\infty)$.

5. Résoudre l'équation différentielle.
6. En déduire l'expression de l'intensité $i(t)$ puis celle de u_R .

7. Exprimer $u_C(t = \tau)$ en fonction de E et d'un facteur numérique. Commenter.
8. Tracer les allures de u_C et i en fonction du temps. Commenter l'allure de l'intensité en $t = 0$.

III. Bilan énergétique

✕ Méthode Comment réaliser des bilans de puissance et d'énergie ? ✕

1. Écrire la loi des mailles.
2. Multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit.
3. Identifier chaque terme de la relation obtenue en terme de puissance algébriquement fournie (dipôles en convention générateur) ou algébriquement reçue (dipôles en convention récepteur), donner leur interprétation et vérifier la conservation de la puissance, donc de l'énergie.
4. Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique.

Application 4 : Bilan énergétique lors de la décharge d'un condensateur

1. Établir le bilan de puissance de la décharge du condensateur et le mettre sous la forme $P_C + P_{Joule} = 0$ en précisant la signification de chaque terme.
2. En déduire le bilan énergétique.
3. Exprimer l'énergie initialement stockée par le condensateur, et l'énergie stockée à la fin du régime transitoire. Qu'est devenue cette énergie ?

Application 5 : Bilan énergétique lors de la charge d'un condensateur

1. Établir le bilan de puissance de la charge du condensateur que l'on mettra sous la forme $P_C + P_{Joule} = P_g$ en précisant la signification de chaque terme.
2. En déduire le bilan énergétique et exprimer l'énergie reçue par le condensateur E_C , perdue par effet Joule E_{Joule} et fournie par le générateur E_g .

Ouverture :

De nombreuses méthodes viennent d'être vues dans ce chapitre et appliquées au circuit RC. On retrouve les mêmes résultats avec un circuit RL : régime libre, réponse indicielle... L'énergie emmagasinée sous forme magnétique s'écrit $E_L = \frac{1}{2}Li^2$.