

chap 3 : Fonctions - Généralités

I) Quelques rappels sur $\mathbb{R}$

II) Généralités

III) Limites

IV) Dérivation

V) Bijection

- Définition d'une bijection.
Comprendre les graphiques.
- prop : f est bijective de I sur J seulement s'il existe $g : J \rightarrow I$ telle que $f \circ g = id$ et $g \circ f = id$.
On la note f^{-1}
- ATTENTION : Il faut ABSOLUMENT vérifier les deux.
- ATTENTION : Pour utiliser f^{-1} , il faut absolument commencer par montrer que f est bijective.
- prop : On obtient le graphe de f^{-1} en effectuant la symétrie du graphe de f par rapport à la droite $Y = X$.
- prop : Soit $f \in \mathcal{F}(I, J)$ et $g \in \mathcal{F}(J, I)$.
On suppose f et g bijectives, alors :
 - * f^{-1} est bijective avec $(f^{-1})^{-1} = f$.
 - * $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- On note que lorsque l'on passe à l'inverse, l'ordre des fonctions "s'inversent".
- Th de la bijection : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est continue et strictement monotone alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. De plus f^{-1} est continue et de même monotonie que f .
- Th de la bijection ou son corollaire : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable sur I .
On suppose que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (ou bien pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$) alors
 1. f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
 2. f^{-1} est dérivable
 3. On a : $\forall y \in J = f(I)$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
- SAVOIR si c'est demandé dans l'énoncé : trouver une expression de f^{-1} .
On fixe $y \in J$ et on résout $f(x) = y$... Le but est d'exprimer x en fonction de y car $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.

chap 4 : Fonctions usuelles

I) Valeur absolue

- Définition de la fonction.
- Graphe de la fonction.

II) Logarithme

- Définition du logarithme (Primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1).
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$.
- Limites du logarithme aux bornes de son ensemble de définition et graphe de la fonction.
- Résultats à connaître : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\ln(1+x) \leq x$.
- Logarithme en base a .
- ATTENTION : L'étude de la fonction varie suivant que $a < 1$ ou $a > 1$. C'est normal car $\ln(a)$ sera soit positif, soit négatif.
- Graphe de $\log_a$ en différenciant les cas.

III) Exponentielle

- Définition de l'exponentielle comme étant la bijection réciproque du logarithme.
- Dérivée de l'exponentielle, limites aux bornes de l'intervalle.
- ATTENTION : Quand vous avez $e^{\cdot \ln(\cdot)}$ BIEN TOUT FAIRE RENTRER DANS l'exponentielle $e^{3 \ln x} \neq 3x!!!!$
- Dérivée de $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

- Résultats à connaître : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $1 + x \leq e^x$.
- Définition des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.
- Dérivée, parité, limites aux bornes des fonctions ch et sh .
- prop : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$

IV) Puissances

- Définition de $x^y = e^{y \ln x}$.
- ATTENTION : Pour que cela soit défini, on doit avoir $x > 0$ par contre, on n'a aucune condition sur y .
- Étude de $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha$
- ATTENTION : Différencier les cas suivants que $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$.
- Bilan : On peut prolonger $x \mapsto x^\alpha$ en 0 si $\alpha > 0$.
- Dérivabilité : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- Tiens mais ça ressemble à ce que l'on connaît avec x^n ...
- Étude du graphe des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ en fonction de α . Réfléchir avec ce que l'on connaît déjà ($x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ et $x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$).
- SAVOIR COMPARER : x^α et x^β en fonction de α et β et de la position de x par rapport à 1.
- Étude de $x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$.
- Bien différencier suivant que $0 < a < 1$ ou bien $a > 1$ (car $\ln a$ change de signe ...).
- $(a^x)' = \ln(a)a^x$
- Etude du graphe. Penser au cas $x \mapsto e^x$ qui correspond au cas $a > 1$ et $x \mapsto e^{-x}$ qui correspond au cas $a < 1$.
- Généralisation à $f(x)^{g(x)}$.
- POUR CALCULER une dérivée une fonction du type : $(f(x))^{g(x)}$, on commence par la transformer sous forme exponentielle et seulement après on dérive.
- Pour calculer la limite de $(f(x))^{g(x)}$, on la transforme sous forme exponentielle (surtout si on est dans le cas de la forme indéterminée $1^\infty = e^{\infty \ln(1)}$) et seulement, on calcule la limite.

V) Étude des graphes

Donnée : On connaît une fonction f , son graphe $\mathcal{C}_f$ et pour simplifier $D_f = [a, b]$ et $Im(f) = [\alpha, \beta]$

On étudie D_g , $Im(g)$ et $\mathcal{C}_g$ dans les cas suivants : $g(x) = f(x + \lambda)$ et $g(x) = f(\lambda x)$,

Graphe de g en fonction de celui de f .

chap 5 : Trigonométrie

I) Congruences

- Définition de la congruence.
- ATTENTION : Si on a $x \equiv y \pmod{a}$ si on multiplie par a dans la congruence, on multiplie AUSSI par a dans le modulo.

II) Fonctions circulaires

- Lien entre le cercle trigonométrique, cosinus et sinus.
- Quelques valeurs en $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
- SAVOIR RETROUVER EN 10s la valeur de $\cos$ ou $\sin$ en $x + \pi, \pi - x, \frac{\pi}{2} \pm x$. S AIDER DU CERCLE TRIGO.
- Formulaire 1 : $\cos(a + b) = \dots$ (10s pour retrouver)
- Formulaire 2 : $\cos a \cos b = \dots$ (20s pour retrouver)
- Formulaire 3 : $\sin p + \sin q = 2 \sin(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2}) \dots$
- CONNAITRE la chanson : si co, co si, co co, si si.
- ATTENTION au piège de la dernière ligne, il y a un -2 .
- Résolution des équations du type $\cos x = \cos y$ et $\sin x = \sin y$.
- NB : On peut retrouver les résultats grâce au cercle trigo.
- Parité et imparité des fonction cosinus et sinus.
- Graphe des fonctions.
- Définition de la tangente.
- Ensemble de définition, π -périodicité et imparité.
- Continuité, dérivabilité de $\tan$, on a $\tan' = (1 + \tan^2) = \frac{1}{\cos^2}$
- Quelques valeurs, graphe, interprétation à l'aide du cercle trigo.
- Formule de $\tan(a + b)$
- $\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y \pmod{\pi}$.

Liste des questions de cours :

- Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable sur I .

On suppose que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (ou bien pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$) alors

1. f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
2. f^{-1} est dérivable
3. On a : $\forall y \in J = f(I)$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Enoncé + preuve du 3 seulement

- Étude de la fonction sh (Ensemble de définition, tableau de variation, graphe, ...).
- Étude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ (Ensemble de définition et graphe pour tous les α , étude uniquement dans le cas $\alpha < 0$).
- Étude de la fonction $x \mapsto a^x$ (Ensemble de définition, dérivée et graphe pour tous les a où c'est défini, étude dans le cas $a > 1$).
- Étude de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ (Ensemble de définition, dérivée et graphe).