

TD 3 : CIRCUITS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

À préparer : Exercices 2, 3, 5 et 6

Compétences	Capacités
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser des bilans énergétiques.

Exercice 1 : Circuit RC



On considère le circuit RC série représenté sur le schéma ci-dessous.

1. L'évolution de la position de l'interrupteur K est : pour $t < 0$ en position 2 ; pour $t > 0$ en position 1. On suppose le condensateur initialement déchargé.

- (a) Déterminer l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. Que vaut la constante de temps ?

On étudie la charge du condensateur. Écrivons la loi des mailles

$$E = u_R + u_C \quad \text{soit} \quad E = Ri_C + u_C \quad \text{donc} \quad E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

On obtient donc une équation différentielle de la forme

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

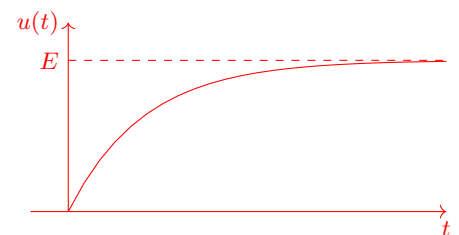
- (b) Déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$ et représenter son allure.

La solution générale s'écrit $u(t) = u_H(t) + u_P$ avec $u_H(t)$ la solution de l'équation homogène, et u_P la solution particulière. On a

$$u_H(t) = Ae^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad u_P = E \quad \text{donc} \quad u(t) = Ae^{-t/\tau} + E.$$

Nous avons besoin des conditions initiales pour déterminer la constante A . À $t = 0$, on sait que $u(t) = 0$ ce qui implique $A = -E$. Finalement

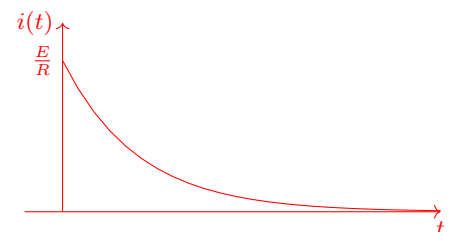
$$u(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$



- (c) En déduire l'expression du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit et tracer son allure.

Comme pour un condensateur $i_C = C \frac{du_C}{dt}$,

$$i_C = \frac{CE}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

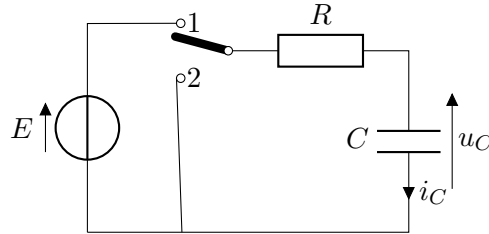


- (d) Faire un bilan de puissance pour identifier ce que devient la puissance fournie par le générateur.

Multiplions la loi des mailles par i_C :

$$\begin{aligned}
 E &= u_R + u_C \quad (\times i_C) \\
 E i_C &= u_R i_C + u_C i_C \\
 \underbrace{E i_C}_{\mathcal{P}_{\text{fournie}}^{\text{générateur}}} &= \underbrace{u_R i_C}_{\mathcal{P}_{\text{resistor}}^{\text{résistor}}} + \underbrace{u_C i_C}_{\mathcal{P}_{\text{condensateur}}^{\text{condensateur}}} .
 \end{aligned}$$

La puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et stockée dans le condensateur.



2. On suppose que le circuit est en régime permanent. On considère alors une nouvelle évolution de la position de l'interrupteur K . Pour $t < 0$ en position 1, pour $t > 0$ en position 2.

(a) En se servant du résultat précédent, donner l'équation différentielle sous forme canonique vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.

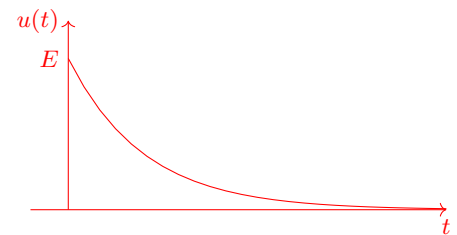
Cette fois-ci, le condensateur est initialement chargé. Dans cette partie, on étudie sa décharge dans le résistor. Par analogie avec la partie précédente, on déduit

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

(b) Déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$ et représenter son allure.

L'équation différentielle est du premier ordre sans second membre, sa solution est de la forme $u(t) = Ae^{-t/\tau}$ avec A une constante. Or, on sait que $u(t=0) = E$ d'après la partie précédente. Donc $A = E$ et

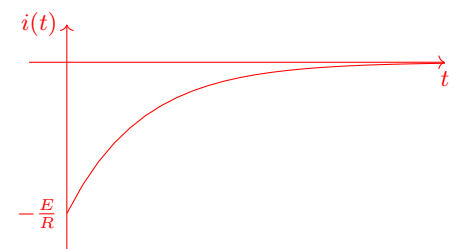
$$u(t) = Ee^{-t/\tau}.$$



(c) En déduire l'expression du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit.

Puisque $i = C \frac{du}{dt}$, on a

$$i = -\frac{E}{R}e^{-t\tau}.$$



(d) Faire un bilan d'énergie et déterminer la valeur de l'énergie dissipée par effet Joule.

Le bilan d'énergie s'obtient en intégrant le bilan de puissance issu de la loi des mailles multipliée par le courant i_C , c'est-à-dire

$$0 = \underbrace{\int_0^\infty u_R i_C dt}_{E_{\text{Joule}}} + \underbrace{\int_0^\infty u_C i_C dt}_{E_C} \quad \text{donc} \quad E_{\text{Joule}} = -E_C.$$

Or

$$\begin{aligned}
 E_C &= \int_0^\infty u_C \times C \frac{du_C}{dt} dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{1}{2} C u_C^2\right)}{dt} dt \\
 &= \int_0^\infty d\left(\frac{1}{2} C u_C^2\right) \\
 &= \left[\frac{1}{2} C u_C^2\right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{2} C u_C^2(\infty) - \frac{1}{2} C u_C^2(0)
 \end{aligned}$$

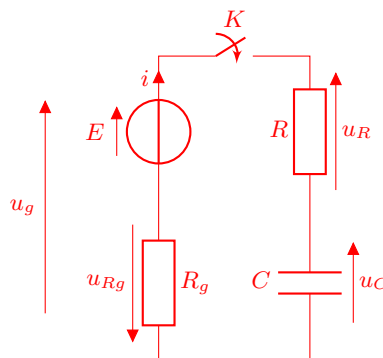
$$E_{Joule} = -E_C = \frac{1}{2} C E^2.$$

Exercice 2 : Détermination graphique



Un dipôle comporte entre ses bornes un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C placés en série. On le relie aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R_g en série avec un interrupteur K . Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit u_c la tension aux bornes du condensateur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

1. Schématiser le circuit électrique.



2. Déterminer $u_c(0^+)$ et $i(0^+)$ en les justifiant.

La tension aux bornes d'un condensateur est continue donc $u_c(0^-) = u_c(0^+)$. Comme le condensateur est initialement déchargé,

$$u_c(0^+) = 0.$$

La courant traversant un condensateur est une fonction discontinue. Ainsi la loi des mailles appliquée à $t = 0^+$ donne

$$E = Ri + u_c(0^+) + R_g i \quad \text{soit} \quad i(0^+) = \frac{E}{R_g + R}.$$

3. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $u_c(t)$.

D'après la loi des mailles,

$$E = Ri + u_C + R_g i \quad \text{soit} \quad E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C + R_g C \frac{du_C}{dt}$$

et finalement

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = (R + R_g) C.$$

4. Déterminer la constante de temps τ du circuit, et donner son interprétation physique.

On a établi que $\tau = (R + R_g) C$: il s'agit du temps typique de charge du condensateur dans un tel circuit.

5. Établir l'expression de $u_c(t)$.

On a une équation différentielle du premier ordre avec second membre. La solution générale s'écrit donc

$$u_C(t) = u_H(t) + u_P$$

avec $u_H(t) = Ae^{-t/\tau}$ la solution de l'équation homogène, et u_P la solution particulière. En réinjectant la solution particulière dans l'équation différentielle, on a

$$u_P = E \quad \text{donc} \quad u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

avec A une constante à déterminer à l'aide des conditions initiales. Comme $u_C(t=0) = 0$, on a $A = -E$ et donc

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

6. Déterminer l'expression de t_1 pour que $u_C(t_1) = 0.9E$.

$$u_C(t_1) = E(1 - e^{-t_1/\tau}) = 0.9E$$

$$\text{soit} \quad e^{-t_1/\tau} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$\frac{t_1}{\tau} = -\ln \frac{1}{10}$$

$$t_1 = \tau \ln 10.$$

Dans l'étude expérimentale du circuit RC, on observe l'oscillogramme ci-contre, en utilisant un générateur délivrant des signaux en créneaux. Les sensibilités sont : 1 V/carreau pour la verticale ; 0,1 ms/carreau pour l'horizontale.

7. Identifier les courbes (1) et (2) aux voies liées respectivement à l'un (ou une association série) des dipôles.

Dans le circuit considéré, il y a trois associations possibles :

- soit on mesure la tension aux bornes du générateur ($E - R_g i$) ou de façon équivalente à l'ensemble {résistor R + condensateur} ;
- soit on mesure la tension aux bornes du condensateur ;
- soit on mesure la tension aux bornes du résistor R .

La tension aux bornes du résistor, notée $u_R = Ri$ est nécessairement nulle quand le condensateur est chargé (car $i \rightarrow 0$ dans ce cas) ; ce n'est le cas d'aucune des courbes représentées, donc cette association est à éliminer.

La tension aux bornes du condensateur évolue de 0 à $t = 0$ vers E quand le condensateur est chargé : il s'agit donc de la courbe (1).

La tension aux bornes du générateur évolue de $E - Ri(t=0) < E$ (car $i(t=0) > 0$) vers E quand le condensateur est chargé : ils s'agit de la courbe (2).

8. Déterminer graphiquement la valeur de la tension U_P au point P et de E . Préciser l'expression de la tension au point P . Sachant que $R = 100 \Omega$, déterminer R_g .

Au point P , la tension aux bornes du générateur vaut d'après le graphique

$$U_P \stackrel{\text{graphiquement}}{=} 4 \text{ V} \quad \text{et} \quad E \stackrel{\text{graphiquement}}{=} 6 \text{ V}.$$

Or on sait qu'en P

$$U_P \equiv u_g(t=0) = E - R_g i(t=0) = E - \frac{R_g}{R + R_g} E = \frac{\cancel{R_g} + R - \cancel{R_g}}{R_g + R} E \quad \text{car} \quad i(t=0) = \frac{E}{R + R_g}.$$

On en déduit

$$U_P = \frac{R}{R + R_g} E$$

$$U_P (R_g + R) = R_g U_P + R U_P = R E$$

$$R_g U_P = R E - R U_P$$

$$R_g = \frac{R(E - U_P)}{U_P} \stackrel{AN}{=} \frac{100 \times (6 - 4)}{4} = 50 \Omega.$$

On retrouve la valeur standardisée pour la résistance de sortie d'une alimentation électrique.

9. En déduire la valeur de C .

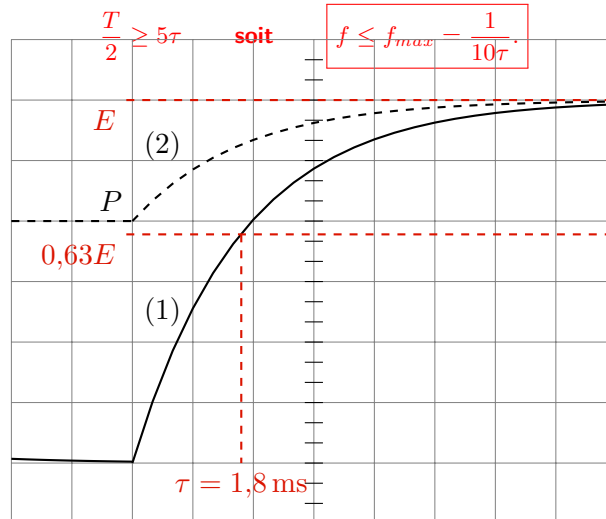
En traçant la tangente à l'origine des courbes (1) ou (2), ou en cherchant après quelle durée la courbe (1) atteint 63% de sa valeur finale, on obtient $\tau \simeq 1,8 \text{ ms}$. Or

$$\tau = (R_g + R)C \quad \text{donc} \quad C = \frac{\tau}{R_g + R} \stackrel{AN}{=} \frac{1,8 \times 10^{-3}}{50 + 100} = 1,2 \mu\text{F}.$$

L'ordre de grandeur correspond aux valeurs des capacités utilisées en TP.

10. Estimer une majoration de la fréquence du signal utilisé.

Si on veut que le condensateur ait le temps de se charger/décharger à 99% pendant une demi-période, alors il faut que



Exercice 3 : Circuit RL

On considère le circuit RL série ci-contre avec les conditions initiales suivantes :

- à $t = 0$, on allume le générateur tel que $E(t > 0) = E_0$ (constante),
- la bobine n'avait initialement pas emmagasiné d'énergie.

1. Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution du courant i . De quel ordre est-elle ?

D'après la loi des mailles,

$$E_0 = u_L + u \quad \text{soit} \quad E_0 = L \frac{di}{dt} + Ri$$

d'où

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}.$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre avec second membre.

2. Faire apparaître une constante de temps τ .

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E_0}{L} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

3. Prévoir l'évolution du système grâce à un portrait de phase.

On a

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau} + \frac{E_0}{L}.$$

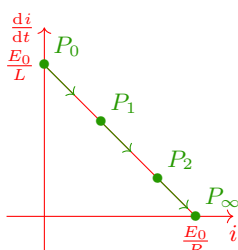


Fig. 1 Portrait de phase.

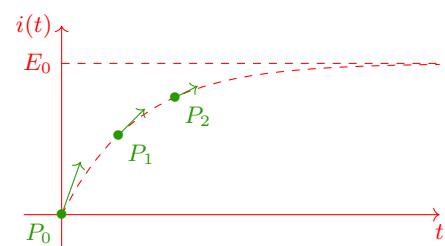
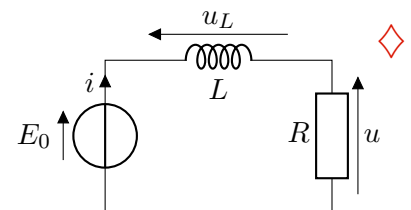


Fig. 2 Évolution temporelle de $i(t)$.

Étudions le portrait de phase représenté en Fig. 1 et pour en déduire l'évolution temporelle de $i(t)$:

- en P_0 , $i = 0$ donc $\frac{di}{dt} = \frac{E_0}{L} > 0$. L'intensité $i(t)$ est donc croissante. Puisque $i(t=0) = 0$, on peut tracer la tangente en P_0 sur le graphe temporel (Fig. 2). Sur le portrait de phase, puisque l'intensité i augmente, on se déplace donc vers le point P_1 ;
- en P_1 , $\frac{di}{dt} > 0$ donc i est toujours croissante, mais cette dérivée est plus faible qu'en P_0 . La pente de la courbe $i(t)$ est donc plus faible qu'en P_0 . On peut à nouveau tracer la tangente en P_1 en Fig. 2. L'intensité augmentant on se déplace sur le portrait de phase, vers le point P_2 ;
- comme précédemment, on observe que la dérivée de l'intensité est positive mais plus petite en valeur absolue qu'en P_1 : l'intensité i continue de croître mais avec une pente de plus en plus faible. Le tracé de la tangente sur la Fig. 2 nous rappelle l'évolution exponentielle attendue et représentée en tireté ;
- le point P_∞ est atteint pour $t \rightarrow \infty$. Il correspond à l'asymptote en $t \rightarrow \infty$ sur la Fig. 2.

4. Résoudre l'équation différentielle trouvée en 1 et donner l'expression finale de $i(t)$ vues les conditions initiales. La représenter en fonction de t .

La solution générale à l'équation différentielle vérifiée par i est

$$i(t) = Ae^{-t/\tau} + i_P \quad \text{avec} \quad i_P = \frac{E_0}{R}$$

la solution particulière et A une constante à déterminer avec les conditions initiales. À $t < 0$, le générateur est coupé donc $i(t < 0) = 0$. Or, l'intensité traversant une bobine est continue donc $i(t=0) = 0$, ainsi

$$i(t=0) = A + i_P = 0 \quad \text{donc} \quad A = -i_P = -\frac{E_0}{R}.$$

Finalement

$$i(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

5. Montrer que l'énergie emmagasinée par la bobine correspond à l'énergie fournie par le générateur à laquelle on a retranché l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor.

Faisons un bilan de puissance. D'après la loi des mailles

$$\begin{aligned} E_0 &= u_L + u \quad (\times i) \\ E_0 \times i &= u_L \times i + u \times i \\ E_0 \times i &= L \frac{di}{dt} \times i + Ri^2. \end{aligned}$$

Par intégration par rapport au temps, on obtient le bilan d'énergie

$$\begin{aligned} \int_0^\infty E_0 \times i dt &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) dt + \int_0^\infty Ri^2 dt \\ E_{\text{générateur}}^{\text{fournie}} &= E_{\text{bobine}}^{\text{reçue}} + E_{\text{résistor}}^{\text{reçue}} \\ \text{soit} \quad E_{\text{bobine}}^{\text{reçue}} &= E_{\text{générateur}}^{\text{fournie}} - E_{\text{résistor}}^{\text{reçue}}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : Circuit CR

Soit le circuit CR ci-contre : On applique un échelon de tension E à la date $t = 0$ s. La grandeur d'intérêt est la tension $s(t)$ aux bornes de la résistance.

1. Établir l'équation différentielle en $s(t)$ en supposant la forme de $u_C(t)$ inconnue.

Appliquons la loi des mailles

$$E = u_C + s(t) \quad \text{donc} \quad u_C = E - s(t).$$

Par ailleurs, on sait que

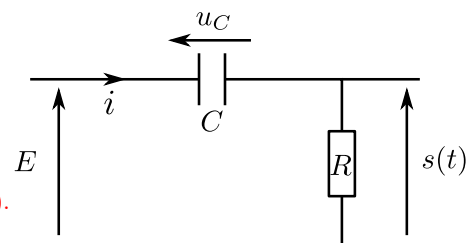
$$i = \frac{s}{R} \quad \text{et} \quad i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{donc} \quad \frac{s}{R} = C \frac{du_C}{dt}.$$

On en déduit alors

$$\frac{s}{R} = C \frac{d(E - s)}{dt} = -C \frac{ds}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{ds}{dt} + \frac{s}{RC} = 0.$$

La solution à cette équation différentielle s'écrit

$$s(t) = Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



et A une constante à déterminer avec les conditions initiales. Le condensateur est initialement déchargé car l'échelon de tension est appliqué à $t = 0$. Ainsi d'après la loi des mailles appliquée à $t = 0$, $s(t = 0) = E = A$. Finalement,

$$s(t) = Ee^{-t/\tau}.$$

2. En supposant maintenant l'expression de $u_C(t)$ connue, vérifier que l'expression de $s(t)$ est cohérente.

Au cours de cet échelon de tension, on s'attend à ce que le condensateur se charge selon l'expression $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$. D'après la loi des mailles,

$$\begin{aligned} E &= u_C + s(t) \\ s(t) &= E - u_C \\ &= E - E(1 - e^{-t/\tau}) \\ &= Ee^{-t/\tau} \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à l'expression établie à la question précédente.

3. Interpréter la valeur finale.

La tension $s(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$ car une fois le condensateur chargé, l'intensité devient nulle.

Exercice 5 : Condensateur avec résistance de fuite

Un condensateur réel est modélisé par un condensateur parfait de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ avec en parallèle une résistance dite «de fuite» R_f .

1. Montrer qu'au bout de 3τ , le condensateur est déchargé d'environ 95 %.

Le condensateur étant initialement chargé, il se décharge dans la résistance R_f selon l'équation

$$u_C(t) = Ee^{-t/\tau}.$$

Au bout d'une durée $t_1 = 3\tau$,

$$u_C(t = 3\tau) = Ee^{-3} \simeq 0.05E.$$

Au bout d'une durée $t_1 = 3\tau$, le condensateur est déchargé à 95%.

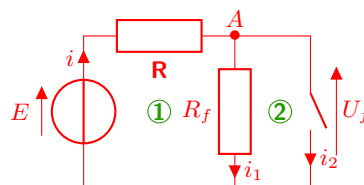
2. Une fois chargé, on observe que le condensateur, laissé seul, se décharge à 95 % en 30 s. Que vaut sa résistance de fuite ?

On sait que $\tau = R_f C$ donc $R_f = \frac{\tau}{C} \stackrel{AN}{=} \frac{30/3}{10 \times 10^{-6}} = 1 \times 10^6 \Omega = 1 \text{ M}\Omega.$

Une fois complètement déchargé, on charge à nouveau le condensateur sous $E = 10 \text{ V}$ à travers une résistance $R = 50 \text{ k}\Omega$ placée en série avec ce condensateur.

3. Sans pour l'instant établir d'équation différentielle, donner la valeur finale U_f de la tension aux bornes du condensateur réel en régime permanent ainsi que la charge finale q_f . (aide : en régime permanent, comment modélise-t-on un condensateur ?)

En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Aussi le circuit équivalent est



On reconnaît un pont diviseur de tension et

$$U_f = \frac{R_f}{R_f + R} E \stackrel{AN}{=} \frac{10^6}{10^6 + 50 \times 10^3} \times 10 = 9,5 \text{ V} \quad \text{et} \quad q_f = CU_f \stackrel{AN}{=} 10^{-6} \times 9,5 = 9,5 \times 10^{-6} \text{ C}.$$

4. Donner à présent l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. Vu R comparée à R_f , simplifier l'expression obtenue et commenter.

On se réfère aux notations introduites dans le schéma précédent. D'après la loi des mailles dans

$$\begin{aligned}\text{la maille 1 : } & E = Ri + R_f i_1 \\ \text{la maille 2 : } & R_f i_1 = u \\ \text{donc } & Ri = E - u.\end{aligned}$$

Par ailleurs d'après la loi des noeuds appliquée au point A,

$$i = i_1 + i_2 \quad \text{soit} \quad Ri = Ri_1 + Ri_2 = \frac{R}{R_f} u + RC \frac{du}{dt}$$

étant donné que $i_1 = \frac{u}{R_f}$ et $i_2 = C \frac{du}{dt}$. Finalement on aboutit à

$$E - u = \frac{R}{R_f} u + RC \frac{du}{dt} \quad \text{soit} \quad E = \left(1 + \frac{R}{R_f}\right) u + RC \frac{du}{dt}.$$

que l'on peut réécrire sous la forme canonique

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_f + R}{\tau R_f} u = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

La solution à cette équation différentielle du premier ordre sans second membre s'écrit

$$u(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{ER_f}{R_f + R}$$

avec A une constante à déterminer avec les conditions initiales. Initialement, le condensateur est totalement déchargé, donc $u(t=0) = 0$ ce qui implique $A = -\frac{ER_f}{R_f + R}$ et donc

$$u(t) = \frac{ER_f}{R_f + R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Comme $R \ll R_f$, on peut simplifier cette expression par

$$u(t) \simeq E (1 - e^{-t/\tau}).$$

5. Montrer que l'énergie emmagasinée par le condensateur correspond à l'énergie fournie par le générateur à laquelle on a retranché l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor.

Même raisonnement que pour l'exercice 3.

Exercice 6 : Association de capacités



1. Soient deux condensateurs C_1 et C_2 associés en parallèle. Soit u la tension appliquée simultanément aux deux condensateurs.

- (a) Écrire q , la charge totale en fonction de u . En déduire C_{eq} la capacité équivalente à deux condensateurs en parallèle.

On a

$$q = q_1 + q_2 \quad \text{soit} \quad q = C_1 u + C_2 u = (C_1 + C_2) u.$$

Or on peut aussi écrire

$$q = C_{eq} u \quad \text{donc} \quad C_{eq} = C_1 + C_2.$$

- (b) En exploitant la relation tension-intensité pour un condensateur, retrouver l'expression de C_{eq} .

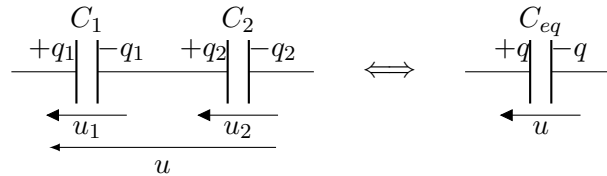
On sait que

$$i_{C_1} = C_1 \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad i_{C_2} = C_2 \frac{du}{dt} \quad \text{or} \quad i = i_{C_1} + i_{C_2} \stackrel{\text{def}}{=} C_{eq} \frac{du}{dt}.$$

Par identification, on retrouve bien

$$\text{donc} \quad C_{eq} = C_1 + C_2.$$

2. Soient deux condensateurs C_1 et C_2 , initialement déchargés et associés en série. Lorsqu'on applique une tension u aux bornes de l'association, il apparaît la situation suivante :



En déduire C_{eq} , la charge du condensateur équivalent sachant que les lois donnant les inductances équivalentes à des associations série et parallèles ont la même forme que pour les résistances.

Les deux condensateurs sont parcourus par une même intensité

$$i_C = C_1 \frac{du_1}{dt} = C_2 \frac{du_2}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} C_{eq} \frac{du}{dt}.$$

Or on sait que $u = u_1 + u_2$ donc

$$\begin{aligned} i_C &= C_2 \frac{du_2}{dt} = C_2 \left(\frac{du}{dt} - \frac{du_1}{dt} \right) \\ i_C &= C_2 \frac{du}{dt} - C_2 \frac{i_C}{C_1} \\ i_C \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) &= i_C \times \frac{C_1 + C_2}{C_1} = C_2 \frac{du}{dt} \\ i_C &= \frac{C_2 C_1}{C_1 + C_2} \frac{du}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} C_{eq} \frac{du}{dt} \\ \text{par identification, } C_{eq} &= \frac{C_2 C_1}{C_1 + C_2} \\ \text{ou bien } \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \end{aligned}$$

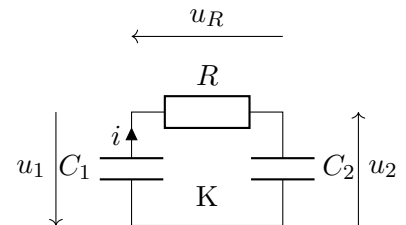
Exercice 7 : Décharge d'un condensateur dans un autre



Pour $t > 0$ (une fois l'interrupteur fermé)

On étudie le circuit représenté ci-contre. Initialement, le condensateur de capacité C_1 est chargé (tension U_0), tandis que le condensateur de capacité C_2 est déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

On considère que les deux condensateurs sont de même capacité : $C_1 = C_2$.



1. Montrer que $\forall t, u_2(t) = u_1(t) - U_0$.

$i = C \frac{du_1}{dt} = C \frac{du_2}{dt}$, donc $\frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt}$, soit $u_1(t) = u_2(t) + A$, avec A une constante d'intégration.

Or à $t = 0$, compte tenu des CI et de la non discontinuité des tensions aux bornes des condensateurs : $U_0 = 0 + A$

ainsi, $u_2(t) = u_1(t) - U_0$

2. Déterminer u_1 et u_2 au bout d'un temps long.

Au bout d'un temps très long les deux condensateurs sont équivalents à un interrupteur ouvert, donc $i(\infty) = 0$, et $u_R(\infty) = 0$.

Alors, la loi des mailles donne $u_1(\infty) = -u_2(\infty)$

D'après la question précédente, on en déduit que $u_1(\infty) = \frac{U_0}{2} = -u_2(\infty)$

3. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u_1 s'écrit

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{\tau} = \frac{U_0}{2\tau}$$

où τ est une constante dont on identifiera l'expression.

Retrouver la valeur de $u_1(\infty)$.

$$\begin{aligned}
 u_1 + u_2 + Ri &= 0 \\
 u_1 + u_1 - U_0 + RC \frac{du_1}{dt} &= 0 \\
 RC \frac{du_1}{dt} + 2u_1 &= U_0 \\
 \frac{du_1}{dt} + \frac{2}{RC} u_1 &= \frac{U_0}{RC}
 \end{aligned}$$

Devant u_1 , on identifie τ tel que $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{RC}$, soit $\tau = \frac{RC}{2}$

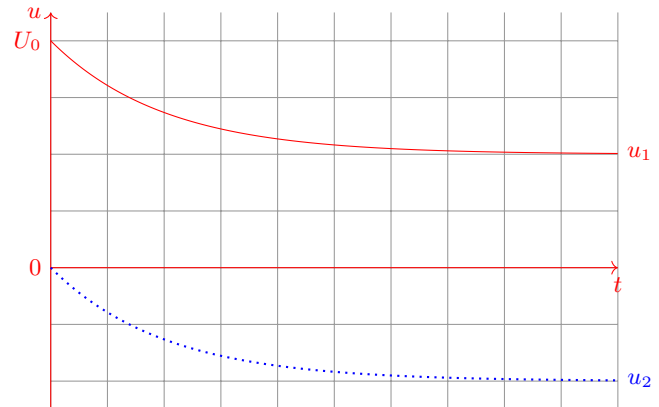
En RP, au bout d'un temps très long, $\frac{du_1}{dt} = 0$, et on retrouve bien $u_1(\infty) = \frac{U_0}{2}$

4. Résoudre l'équation différentielle et en déduire les expressions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
5. Représenter l'allure de u_1 et u_2 au cours du temps sur le même graphe.

Solution générale : $u_1(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{2}$

Or à $t = 0$, $u_1(0) = U_0 = K + \frac{U_0}{2}$, soit $u_1(t) = \frac{U_0}{2} (1 + e^{-\frac{t}{\tau}})$

On en déduit $u_2(t) = \frac{U_0}{2} (-1 + e^{-\frac{t}{\tau}})$



6. Aspect énergétique.

- (a) Déterminer l'énergie initiale stockée dans le circuit.
- (b) Déterminer l'énergie finale stockée dans le circuit.
- (c) Exprimer l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la décharge.
- (d) Effectuer un bilan énergétique.

— **Énergie initiale dans les 2 condensateurs :** $\mathcal{E}_{\text{stockée}}(0) = \frac{1}{2} C u_1(0)^2 + \frac{1}{2} C u_2(0)^2 = \frac{1}{2} C U_0^2$

— **Énergie finale dans les 2 condensateurs :** $\mathcal{E}_{\text{stockée}}(\infty) = \frac{1}{2} C u_1(\infty)^2 + \frac{1}{2} C u_2(\infty)^2 = \frac{1}{2} C (U_0/2)^2 + \frac{1}{2} C (-U_0/2)^2 = \frac{C U_0^2}{4}$

— **L'énergie $\frac{C U_0^2}{4}$ a été perdue : elle a été reçue et dissipée par effet Joule dans la résistance.**