

CHAPITRE 5

OSCILLATEURS HARMONIQUES EN RÉGIME LIBRE

Sommaire

I . Oscillateur harmonique mécanique	1
1 . Système et analyse qualitative	1
2 . Force de rappel élastique : loi de Hooke	3
3 . Position du problème	5
4 . Position d'équilibre	5
5 . Principe fondamental de la dynamique	7
6 . Résolution de l'équation du mouvement	8
7 . Aspects énergétiques	9
II . Oscillateur harmonique électrique	11
1 . Circuit étudié	11
2 . Établissement de l'équation différentielle	11
3 . Conditions initiales	11
4 . Résolution complète	12
5 . Aspect énergétique	12

Ce chapitre est consacré au modèle de l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire celui d'un système oscillant pour lequel on néglige toute dissipation d'énergie. Cette description se fera via deux exemples :

- le système masse-ressort en mécanique,
- le circuit LC en électricité.

Nous construirons donc des analogies formelles entre ces deux domaines de la physique. Pour l'instant, nous nous contenterons d'étudier la réponse de ces systèmes en régime libre.

I. Oscillateur harmonique mécaniqueI.1. Système et analyse qualitative

Considérons une masselotte fixée à une extrémité d'un ressort considéré sans masse et dont l'autre extrémité est fixée à un bâti. Au départ, la masselotte est écartée d'une position $x = x_{\max}$ puis lâchée sans vitesse initiale. Du fait de la force de rappel élastique du ressort, la masse est « ramenée » vers sa position d'équilibre. Entretemps, le système a gagné de l'énergie cinétique et va plus loin que sa position d'équilibre vers la gauche puis s'arrête de l'autre côté en $x = -x_{\max}$. Il repart alors dans l'autre sens à nouveau vers la position d'équilibre à cause de la force de rappel F_{rap} qui a changé de direction entretemps et ainsi de suite. La force qu'exerce le ressort sur la masse sera donc la seule force horizontale considérée. La réaction normale du support et la force de gravité (le poids de la masse) seront les deux seules forces verticales et vont se compenser.

L'évolution temporelle de la position de la masse est décrite par la coordonnée $x(t)$. La masse est soumise à la **force (horizontale) de rappel dite élastique** du ressort F_{rap} .

Animation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr//Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php



Si aucune force de frottement n'est présente pour faire diminuer l'énergie mécanique du système masse-ressort, le mouvement d'aller retour de la masse se répète indéfiniment, la masse oscille !

Compétences

*** Capacité : Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. ***

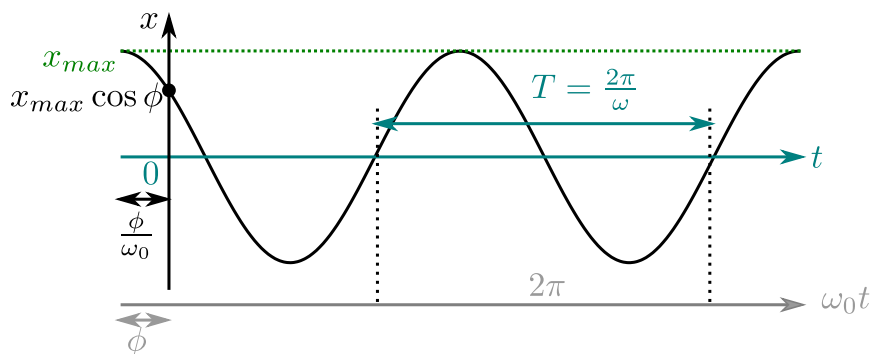


Fig. 1 Signal sinusoïdal : dépendance en temps et en phase.

La manipulation de cours nous montre que la position x peut s'écrire

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{eq}$$

avec A et ϕ des constantes déterminées par les CI de l'expérience.

- $(x_{\max} - x_{eq})$ représente **l'amplitude du mouvement**, avec x compris entre $-x_{\max}$ et $x_{\max}$. Elle s'exprime en m. Le mouvement de la masselotte est symétrique de part et d'autre de la position d'équilibre x_{eq} ;
- l'argument du cosinus $\omega_0 t + \phi$ est appelé **phase**. Elle est sans dimension. ϕ est appelée **phase à l'origine**. On peut choisir l'origine des temps pour avoir $\phi = 0$.

À retenir



La pulsation propre ω_0 , la fréquence propre f_0 et la période propre T_0 sont reliés par les relations :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Il est important de noter que des oscillations se produisent s'il existe une force de rappel capable de ramener le système vers sa position d'équilibre.

Animation

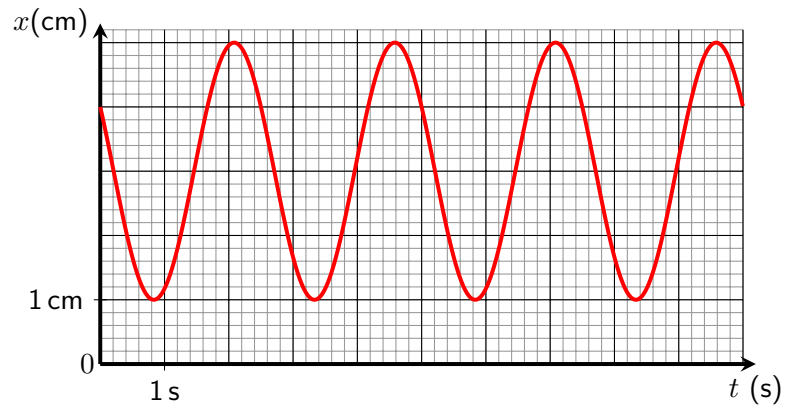
Animation pour expliquer l'amplitude, phase...

<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/sinus.php>



Application 1 : Lecture graphique

On donne ci-contre l'évolution de la position $x(t)$ d'un oscillateur harmonique au cours du temps.



1. Déterminer graphiquement l'amplitude.

Graphiquement : Amplitude $= \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{21,4 - 16,2}{2} = 2,6 \text{ cm}$

Valeur conforme avec la modélisation fournie.

2. Déterminer graphiquement la valeur moyenne.

Graphiquement : Valeur moyenne $= \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{21,4 + 16,2}{2} = 18,8 \text{ cm}$, qui est bien conforme à la valeur de y_{eq} fournie par la modélisation.

3. Déterminer graphiquement la période propre, notée T_0 .

Pour déterminer la période, prenons toutes les périodes affichées (au nombre de 8) :

$8T_0 = 4,8 - 0,2$, soit $T_0 = 0,58 \text{ s}$

4. Déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0 .

D'après la modélisation $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10,94} = 0,57 \text{ s}$, valeur qui concorde avec la valeur lue graphiquement.

5. Déterminer la valeur de la phase à l'origine des temps φ . **Attention !** La valeur de la phase à l'origine des temps φ ne se lit pas directement sur le graphe de $y(t)$.

$y(t = 0) = Y_m \cos(\varphi) + y_{\text{eq}}$: φ est donc reliée directement à la valeur de y à $t = 0$, d'où son nom.

Avec les valeurs fournies par la modélisation de Y_m , φ et y_{eq} , on détermine $y(t = 0) = 20,2 \text{ cm}$, conforme à la valeur graphique.

I.2. Force de rappel élastique : loi de Hooke

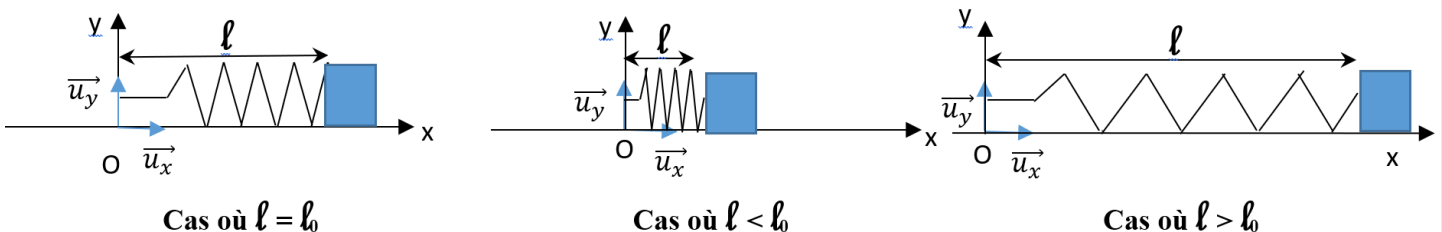


Fig. 2 Schématisation du dispositif masse-ressort.

Un ressort est un dispositif mécanique pouvant se déformer dans une certaine direction. Ici en pratique la direction Ox . Le ressort peut être décrit par une seule variable : sa longueur ℓ . Si on n'applique aucune force sur le ressort, la longueur du ressort est appelée longueur à vide et notée ℓ_0 .

Remarque

Attention la longueur à vide n'est pas la longueur à l'équilibre.

Le ressort exerce une force de sens opposé selon ℓ :

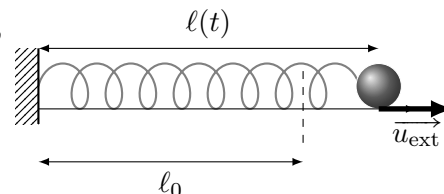
- Si on tire sur le ressort $\ell > \ell_0$ et naturellement il a tendance à vouloir se raccourcir pour revenir à sa position de repos. Il exerce sur le point M , une force de rappel telle que $\vec{F}_{\text{rap}} \cdot \vec{u}_x < 0$;
- Si on comprime le ressort $\ell < \ell_0$ et naturellement il a tendance à vouloir s'allonger pour revenir à sa position de repos. Il exerce sur le point M , une force de rappel telle que $\vec{F}_{\text{rap}} \cdot \vec{u}_x > 0$.

À retenir Force de rappel élastique

La force de rappel élastique exercée par un ressort de **longueur à vide** ℓ_0 , de constante de raideur k et de **longueur instantanée** $\ell(t)$ s'écrit :

$$\vec{f}_{\text{élastique}} = -k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{ext}}$$

avec $\vec{u}_{\text{ext}}$ le **vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort**.



Le signe $-$ permet de satisfaire la description précédente :

- Si $\ell > \ell_0$ alors $F_{\text{rap}} < 0$, le ressort tire la masse vers la gauche pour revenir à $\ell = \ell_0$;
- Si $\ell < \ell_0$ alors $F_{\text{rap}} > 0$, le ressort tire la masse vers la droite pour revenir à $\ell = \ell_0$.

✕ Méthode Comment exprimer la force de rappel élastique ? ✕

1. Faire un schéma comprenant :

- le ressort,
- la longueur du ressort (représentée par une double flèche avec « ℓ » dessus) d'un bout à l'autre du ressort,
- le vecteur $\vec{u}_{\text{ext}}$,
- l'axe orienté $((Ox), (Oy), (Oz))$ et le vecteur unitaire correspondant $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$,
- l'origine O de l'axe,
- la distance algébrique (x, y, z) entre l'origine O et la masse.

2. Écrire la force de façon générale $\vec{f} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$.

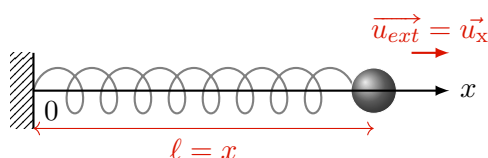
3. Relier $\vec{u}_{\text{ext}}$ au vecteur unitaire orientant l'axe.

4. Relier la longueur du ressort ℓ à la position sur l'axe en s'aidant du dessin.

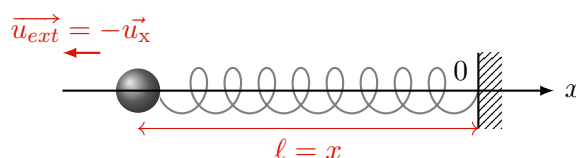
5. Vérifier la validité physique de la formule.

Application 2 : Expression de la force de rappel élastique

1. Dans les deux situations suivantes, déterminer l'expression de la force de rappel élastique $\vec{F}_{\text{rappel}}$.



$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{ext}} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x = -k(x - \ell_0) \vec{u}_x.$$



$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{ext}} = k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x = k(x - \ell_0) \vec{u}_x.$$

2. Même question si on choisit l'origine du repère en $x = \ell_0$.

$x = \ell - \ell_0$ d'où $\vec{F}_{\text{rappel}} = -kx\vec{u}_x$.

$x = \ell - \ell_0$ d'où $\vec{F}_{\text{rappel}} = kx\vec{u}_x$.

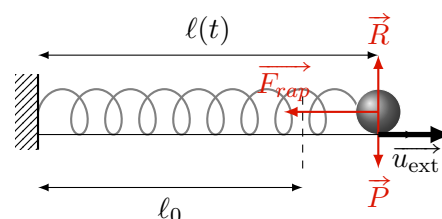
I.3. Position du problème

✕ Méthode Comment commencer l'étude d'un système mécanique ? ✕

AVANT TOUTE CHOSE, il FAUT :

1. Définir le système étudié.
2. Préciser le référentiel d'étude.
3. Réaliser le bilan des forces qui s'exercent sur le système étudié.
4. Représenter un schéma du dispositif étudié, sur lequel les forces seront représentées, ainsi que les axes cartésiens nécessaires.

- Système : { masselotte m } ;
- Référentiel : terrestre ;
- Bilan des forces :
 - ◆ poids $\vec{P} = m\vec{g}$,
 - ◆ réaction du support $\vec{R}$,
 - ◆ force de rappel élastique $\vec{F}_{rap} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$.



I.4. Position d'équilibre

Position d'équilibre

Une **position d'équilibre** x_{eq} est une position telle que si on y pose le système sans vitesse initiale alors il y reste :

$$\text{Si à } t = 0, x(t = 0) = x_{\text{eq}} \text{ et } \frac{dx}{dt}(t = 0) = 0, \text{ alors } \forall t > 0, \frac{dx}{dt}(t) = 0.$$

À retenir



En une position d'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur l'objet est nulle : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

✕ Méthode Comment déterminer une position d'équilibre ? ✕

1. Écrire qu'à l'équilibre : $\vec{v} = \vec{0}$ et $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.
2. Isoler la longueur du ressort à l'équilibre ℓ_{eq} et l'exprimer en fonction de ℓ_0 , m , g et k .
3. Vérifier la cohérence physique :
 - vérifier l'homogénéité de la formule (penser au fait que $\dim(k\ell_{\text{eq}}) = \dim(mg)$;
 - comparer physiquement ℓ_{eq} à ℓ_0 , en lien avec l'effet du poids sur la masse.

Application 3 : Établir la position d'équilibre

On étudie un ressort placé sur une table horizontale.

1. Déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort si celui-ci est horizontal.

Système : Masse $M(m)$

Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $m\vec{g}$
- réaction du support (normale au support en l'absence de frottements) : $\vec{R}_N$
- force de rappel élastique $\vec{f}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$

À l'équilibre $\vec{v} = \vec{0}$ et $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, donc $m\vec{g} + \vec{R}_N - k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_x = \vec{0}$

On projette selon $\vec{u}_x$, i.e. on calcule le produit scalaire entre la relation précédente et $\vec{u}_x$: $m\vec{g} \cdot \vec{u}_x + \vec{R}_N \cdot \vec{u}_x - k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{0} \cdot \vec{u}_x$

Or $\vec{R}_N$ et $m\vec{g}$ sont orthogonaux à $\vec{u}_x$, donc leurs produits scalaires sont nuls et $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1$, car $\vec{u}_x$ est un vecteur unitaire de norme 1.

Ainsi : $-k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$, soit $\ell_{eq} = \ell_0$: pour un ressort horizontal, la longueur à l'équilibre est égale à la longueur à vide.

2. On place l'origine de l'axe (Ox) au point d'attache de la masse au ressort à l'équilibre. En déduire la position d'équilibre x_{eq} .

Avec un schéma, on en déduit que $x_{eq} = 0$.

Exercice 1 : Positions d'équilibre de ressorts verticaux

Une masse m est attachée à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k .

1. Déterminer pour le ressort 1 la longueur du ressort à l'équilibre. Comparer à la longueur à vide.

La masse m est soumise au poids $m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ (le poids est dans le même sens que $\vec{u}_z$)

et à la force de rappel élastique $\vec{f}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$

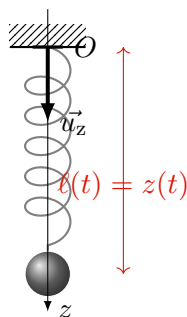
À l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{f}_{el} = \vec{0}$,

soit $mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$,

donc $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0$, en effet la masse m tire sur le ressort.

D'après le schéma $\ell(t) = z(t)$, ainsi $\vec{f}_{el} = -k(z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$.

Ressort 1



2. Déterminer pour le ressort 2 la longueur du ressort à l'équilibre. Comparer à la longueur à vide.

La masse m est soumise au poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ (le poids est dans le sens opposé à $\vec{u}_z$)

et à la force de rappel élastique $\vec{f}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$.

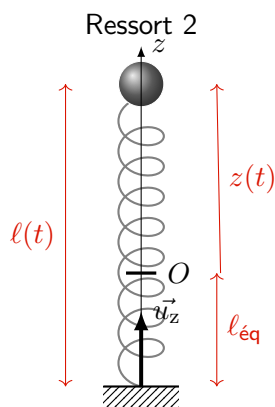
À l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{f}_{el} = \vec{0}$,

soit $-mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$,

donc $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} < \ell_0$, en effet la masse m comprime le ressort.

D'après le schéma $\ell(t) = z(t) + \ell_{eq}$, ainsi $\vec{f}_{el} = -k(\ell_{eq} + z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$, soit

$\vec{f}_{el} = -k\left(z(t) - \frac{mg}{k}\right)\vec{u}_z$.



I.5. Principe fondamental de la dynamique

Compétences

*** Capacité : Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique. La résoudre compte tenu des conditions initiales. ***

✕ Méthode Écriture des dérivées temporelles ✕

Afin de simplifier les calculs, on écrit les dérivées temporelles à l'aide d'un point tel que :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} \\ \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x} \end{cases}$$

✕ Méthode Comment établir l'équation du mouvement ? ✕

1. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système étudié et dans le référentiel choisi.
2. Projeter sur l'axe du mouvement et obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.
3. L'écrire sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$

4. Identifier l'expression de ω_0 , la **pulsation propre** de l'oscillateur.

Application 4 : Établir l'équation du mouvement de l'oscillateur mécanique

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système étudié.

Appliquons le PFD (ou deuxième loi de Newton) au point M : $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ devient

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_z + R\vec{u}_z - k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x.$$

2. Le mouvement se faisant selon l'horizontale, projeter l'équation précédente selon $\vec{u}_x$ puis en déduire l'**équation différentielle** reliant $\ddot{x}$ et x .

Le mouvement se faisant uniquement selon l'horizontale $\ddot{y} = \dot{y} = 0$. Projétons le PDF selon les deux axes Ox et Oz :

$$\text{sur } \vec{u}_x : \quad m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) \quad (1)$$

$$\text{sur } \vec{u}_z : \quad 0 = -mg + R. \quad (2)$$

Le poids est donc compensé par la réaction du support. L'Éq 1 nous donne l'équation du mouvement

$$m\ddot{x} + k(\ell - \ell_0) = 0.$$

3. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique en donnant l'expression de la **pulsation propre** ω_0 en fonction de k et de m .

On introduit la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. L'équation du mouvement devient donc

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0.$$

À retenir ♥ Oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un système vérifiant l'équation différentielle sous forme canonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_{eq},$$

où ω_0 est la pulsation propre, exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ **dépend des caractéristiques intrinsèques du système**.
Un tel système oscille sinusoïdalement autour de sa position d'équilibre ℓ_{eq} .

Rappel :

Équation différentielle : équation qui relie une fonction, ici $x(t)$ à certaines de ses dérivées. Ici l'équation différentielle est du second ordre car $\ddot{x}$ est présent.

I.6. Résolution de l'équation du mouvement

À l'équilibre $\ddot{x} = 0$ donc l'équation différentielle implique $x_{eq} = \ell_0$, d'où

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre avec second membre !

✕ Méthode Comment résoudre l'équation différentielle $\ddot{y} + \omega_0^2 y = b$ (E) ? ✕

1. La solution générale de l'équation (E) s'écrit

$$y(t) = y_H(t) + y_P$$

avec

2. y_H la solution générale de l'équation homogène (sans 2nd membre) $\ddot{y}_H + \omega_0^2 y_H = 0$ (EH) :

$$y_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$y_H(t) = Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

3. y_P une solution particulière de l'équation différentielle étudiée (E), recherchée sous la forme du second membre, constant ici, qui vérifie : $0 + \omega_0^2 y_P = b$.

4. En déduire la solution générale de (E) :

$$y(t) = y_H(t) + y_P$$

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + y_P$$

$$y(t) = Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + y_P$$

5. Déterminer les deux constantes d'intégration (A, B) à l'aide des deux conditions initiales $y(t=0) = y_0$ et $\dot{y}(t=0) = v_0$.

(a) D'après la solution $y(0) = A + \frac{b}{\omega_0^2}$, or d'après la CI $y(0) = y_0$. Ainsi $A + \frac{b}{\omega_0^2} = y_0$, donc $A = \dots$

(b) Exprimer la dérivée de y : $\frac{dy}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

Puis exprimer sa valeur en $t = 0$: $\frac{dy}{dt}(0) = B\omega_0$. Et on en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B = \dots$

6. Conclure sur l'expression de $x(t)$.

Application 5 : Résolution de l'équation différentielle d'un OH mécanique

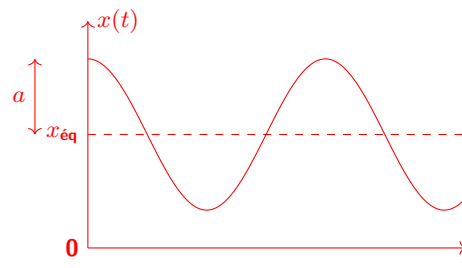
Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ en tenant compte des conditions initiales suivantes et représenter $x(t)$ dans les différents cas.

1. On étire le ressort depuis sa position d'équilibre d'une distance a et on lâche la masse sans vitesse initiale : $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\dot{x}(0) = 0$.

La solution générale s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}} \\ x(0) &= A + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}} + a, \quad \text{soit} \quad A = a \\ \dot{x}(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(0) &= B\omega_0 = 0, \quad \text{donc} \quad B = 0, \quad \text{car} \quad \omega_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x(t) = a \cos(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$.

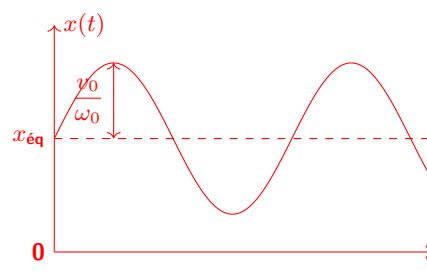


2. Depuis la position d'équilibre, on communique une vitesse initiale à la masse : $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\dot{x}(0) = v_0$

La solution générale s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}} \\ x(0) &= A + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}}, \quad \text{soit} \quad A = 0 \\ \dot{x}(t) &= B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(0) &= B\omega_0 = v_0, \quad \text{donc} \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Ainsi $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$.

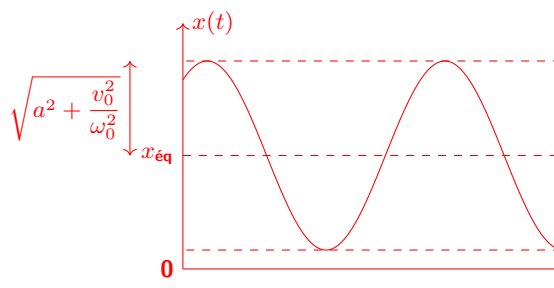


3. $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\dot{x}(0) = v_0$

La solution générale s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}} \\ x(0) &= A + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}} + a, \quad \text{soit} \quad A = a \\ \dot{x}(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(0) &= B\omega_0 = v_0, \quad \text{donc} \quad B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

Ainsi $x(t) = a \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$.



4. $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\dot{x}(0) = 0$

La solution générale s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}} \\ x(0) &= A + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}}, \quad \text{soit} \quad A = 0 \\ \dot{x}(t) &= B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(0) &= B\omega_0 = 0, \quad \text{donc} \quad B = 0, \quad \text{car} \quad \omega_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x(t) = x_{\text{éq}}$: en effet, si la masse m est placée à la position d'équilibre sans vitesse initiale, elle y reste (par définition même de la position d'équilibre).

I.7. Aspects énergétiques

Compétences

*** Capacité : Réaliser un bilan énergétique. ***

✕ Méthode Comment réaliser un bilan de puissance en mécanique ? ✕

Pour un bilan selon un axe :

- Projeter le PFD selon cet axe.
- Multiplier l'équation obtenue par la vitesse selon ce même axe.

Multiplions le PFD projeté sur l'axe Ox par $\dot{x}$:

$$\begin{aligned}
 (m\ddot{x} + kx = 0) \times \dot{x} \\
 m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \\
 \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)}_{P_{\text{cinétique}}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right)}_{P_{\text{potentielle}}} = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

C'est le bilan de puissance du système : il n'y a pas de pertes, seulement des échanges.

Comme $P = \frac{dE}{dt}$, on identifie :

- l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (x_{\max} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi))^2$ liée au mouvement ;
- l'énergie potentielle liée à la présence de la force de rappel élastique du ressort. Le ressort, lorsqu'il est comprimé ou étiré peut « stocker » de l'énergie qui peut être « potentiellement » convertie en une autre forme d'énergie, en l'occurrence ici cinétique. Cette énergie dépend non pas de la vitesse de la masse mais de sa position, car elle est liée à la compression ou à l'étirement du ressort. $E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (x_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi))^2$.

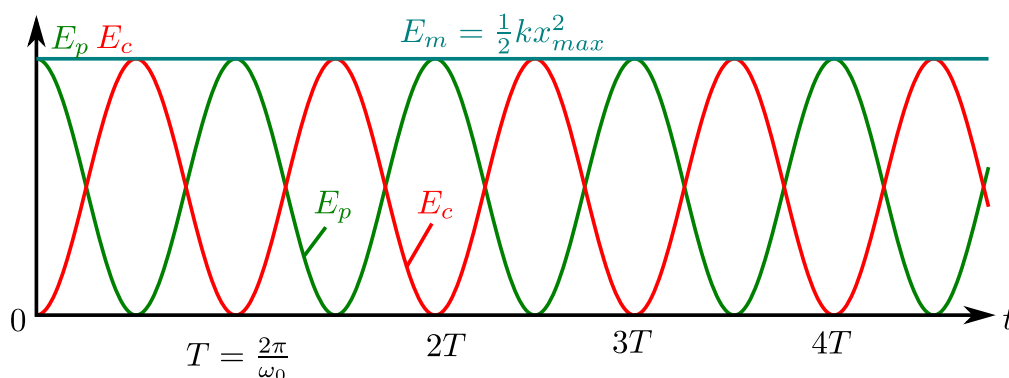


Fig. 3 Évolution de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p au cours du temps.

Il n'y a aucune force de frottement prise en compte dans l'étude de notre oscillateur, cas idéal, on s'attend donc à ce que l'**énergie mécanique** du système définie comme la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique doit être **une grandeur conservée, c'est-à-dire une constante au cours du temps**.

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2} m (x_{\max} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi))^2 + \frac{1}{2} k (x_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi))^2 \tag{4}$$

$$\stackrel{\omega_0^2 = k/m}{=} \frac{1}{2} k x_{\max}^2. \tag{5}$$

Au cours du mouvement, l'énergie mécanique est conservée, ce qui est en accord avec l'hypothèse selon laquelle les frottements sont négligés.

C'est également ce que le bilan de puissance prédisait.

À retenir Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique emmagasinée par un ressort s'écrit

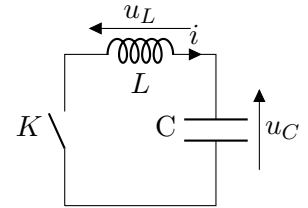
$$E_p^{\text{élastique}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

avec k la constante de raideur du ressort, ℓ sa longueur instantannée et ℓ_0 sa longueur à vide.

II. Oscillateur harmonique électrique

II.1. Circuit étudié

Considérons le circuit LC ci-contre constitué d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . À $t = 0$, l'interrupteur K est fermé. Initialement, le condensateur est chargé sous une tension E telle que $q(t = 0^-) = CE$, et la bobine est déchargée.



II.2. Établissement de l'équation différentielle

La méthode pour établir l'équation différentielle vue au *Chapitre 4 : Circuits linéaires du premier ordre* reste valable.

Application 6 : Détermination de l'équation différentielle

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge q .

On applique la loi des mailles

$$u_C + u_L = 0 \quad (6)$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad (8)$$

- La mettre sous la forme canonique d'un oscillateur harmonique.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9)$$

On retrouve la même équation canonique que pour l'oscillateur harmonique en mécanique. Ainsi, il se construit une analogie formelle entre ces deux domaines de la physique.

Les techniques de résolution sont les mêmes, et sont à maîtriser obligatoirement pour espérer mener à bien les exercices de physique.

II.3. Conditions initiales

✕ Méthode Comment déterminer les conditions initiales dans un circuit du 2^e ordre ? ✕

Pour résoudre une équation différentielle du 2^e ordre, deux conditions initiales $s(0^+)$ et $\frac{ds}{dt}(0^+)$ sont nécessaires :

- Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
- Utiliser la continuité de la tension aux bornes du condensateur (ou de la charge du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS (à $t = 0^+$) la fermeture de l'interrupteur.
- Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à

$t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$. En déduire les valeurs de $s(0^+)$ et $\frac{ds}{dt}(0^+)$.

Application 7 : Conditions initiales

Déterminer les valeurs de q , u_c , i et $\frac{du_c}{dt}$ à l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur).

- Le condensateur a été au préalable chargé sous une tension E , donc $u_c(0^-) = E$.
Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$.
Donc $u_c(0^+) = E$ et $q(t = 0^+) = CE$.
- Pour $t < 0$ aucun courant ne circule, donc $i(0^-) = 0$.
Or l'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.
- Enfin, $i = C \frac{du_c}{dt}$, donc $\frac{du_c}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$.

II.4. Résolution complète

La méthode de résolution est identique à celle vue pour l'oscillateur mécanique puisqu'il s'agit de la même équation différentielle.

Application 8 : Résolution de l'équation différentielle

1. Résoudre l'équation différentielle $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ en utilisant les conditions initiales déterminées précédemment.

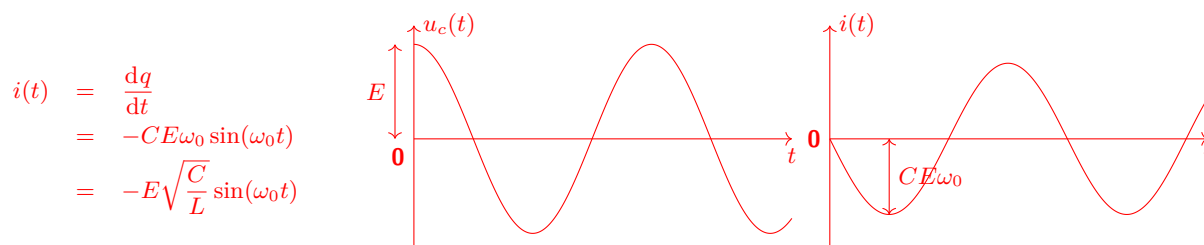
La solution générale s'écrit : $q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

D'après les CI : $q(0^+) = CE = A$

et $\dot{q}(t = 0) = B\omega_0 = 0$ car $\dot{q}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$.

Ainsi $q(t) = CE \cos(\omega_0 t)$.

2. Représenter l'allure de q en fonction du temps, puis de i .



II.5. Aspect énergétique

Application 9 : Bilan de puissance du circuit LC

1. Effectuer un bilan de puissance du circuit LC. L'écrire sous la forme $\frac{dE}{dt} = 0$, où on exprimera E : à quoi correspond cette grandeur ? Interpréter.

On part de la loi des mailles :

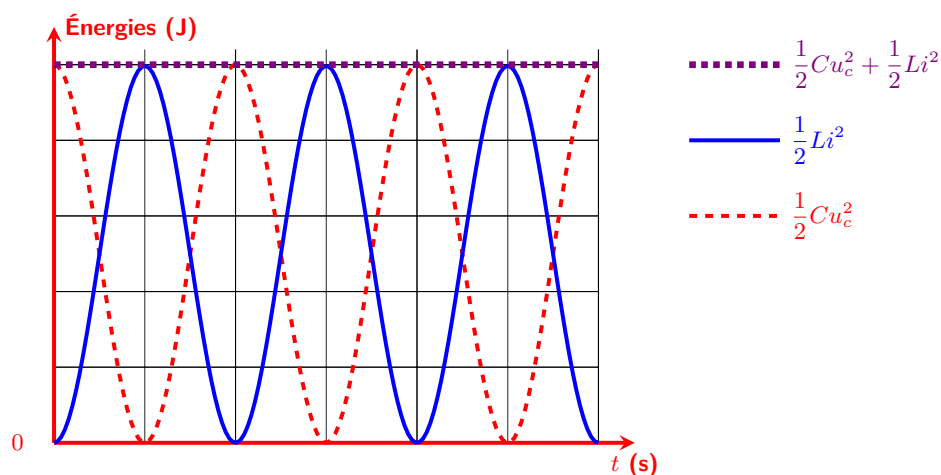
$$\begin{aligned}u_c + u_L &= 0 \\u_c \times i + u_L \times i &= 0 \\u_c \times C \frac{du_c}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i &= 0 \\\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) &= 0 \\\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que l'énergie totale stockée dans le condensateur et la bobine se conserve :

$$\frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \text{constante} = \frac{1}{2} C E^2 + 0$$

. L'énergie initialement stockée dans le condensateur, $\frac{1}{2} C E^2$, s'échange entre le condensateur et la bobine.

2. Représenter l'allure des énergies stockées par le condensateur et la bobine au cours du temps.



Le condensateur se décharge au cours du temps, donc il y a un courant variable dans le circuit. On a des charges en mouvement, il se crée un champ magnétique intercepté par la bobine d'inductance L . La bobine accumule de l'énergie.

Lorsque le condensateur est complètement déchargé, la bobine a accumulé le maximum d'énergie. Le champ magnétique induit un courant, les charges circulent dans le circuit. Le condensateur se charge à nouveau. Ce processus est répété continuellement.

L'énergie oscille entre la bobine et le condensateur avec une période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Animation

Animation circuit RLC (fixer $R=0$) et observer l'évolution de E_c et de E_p en fonction du temps. Possible de faire évoluer L et C indépendamment de voir l'influence sur la période.

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/NRJ_FJ.php



À retenir **Analogie oscillateurs mécanique et électrique**

	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique LC série
	position $x(t)$	Charge du condensateur $q(t)$
	vitesse $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$	Intensité du courant $i(t) = \frac{dq}{dt}$
Équation différentielle	$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = kx_{\text{éq}}$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$
	Constante de raideur du ressort k	Capacité du condensateur $\frac{1}{C}$
	Masse m	Inductance L
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Énergies	$E_p = \frac{1}{2} kx^2$	$\mathcal{E}_{\text{stockée dans C}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
	$E_c = \frac{1}{2} m v_x^2$	$\mathcal{E}_{\text{stockée dans L}} = \frac{1}{2} L i^2$

Ouverture :

Les frottements ou plus généralement les phénomènes dissipatifs ont été négligés jusqu'à présent. Leur prise en compte fera l'objet du prochain chapitre *Chapitre 6 : Oscillateurs amortis*.