

CHAPITRE 4

CIRCUITS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Sommaire

I . Système linéaire du premier ordre	1
II . Retour sur la terminale : charge et décharge d'un condensateur	2
1 . Étude graphique	2
2 . Méthodes générales	3
3 . Étude du régime libre d'un circuit RC (décharge du condensateur)	4
4 . Réponse à un échelon de tension ou réponse indicielle	6
5 . Cas du circuit RC soumis à un échelon de tension	7
III . Bilan énergétique	8

I. Système linéaire du premier ordre

Les systèmes linéaires du premier ordre sont nombreux en physique et modélisent souvent en premier approximation le système étudié :

- En mécanique : les frottements dits visqueux peuvent être modélisés en première approximation par

$$\frac{dv}{dt} + kv = 0;$$

- En physique nucléaire : l'évolution de l'effectif d'une population d'atomes radioactifs décroît selon une loi :

$$\frac{dn}{dt} + kn = 0;$$

- En chimie : exemple

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} + k[\text{H}_2\text{O}_2] = 0.$$

L'équation différentielle du premier ordre traduit une propriété fondamentale : **les variations de la grandeur qui caractérisent le système sont liées à la valeur instantanée de cette grandeur.**

Le caractère **linéaire** de l'équation en revanche, n'est souvent qu'une *modélisation simple du problème, et non une propriété intrinsèque du système étudié*. Le modèle linéaire n'est valable qu'en première approximation. Par exemple, en mécanique, pour modéliser un frottement fluide, le modèle quadratique est souvent plus adapté. Néanmoins, dans l'état actuel de nos connaissances, la loi de décroissance d'une population radioactive est rigoureusement linéaire.

Remarque

Exemple d'équations différentielles non linéaires :

$$2\dot{f}^2 + 4f = 0; \quad \ddot{f} + \sin f = 0.$$

En électricité la charge ou la décharge d'un condensateur dans un circuit RC, ou celle d'une bobine dans un circuit RL suit une loi du premier ordre. Ces systèmes se prêtant bien à une confirmation par l'expérience des résultats de l'étude analytique : ce sont eux que nous étudierons par la suite.

II. Retour sur la terminale : charge et décharge d'un condensateur

II.1. Étude graphique

Compétences

*** Capacité : Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon ***

*** Capacité : Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ***

✕ Méthode Comment déterminer graphiquement τ ? ✕

- **1^{ère} méthode en utilisant la valeur de $u_c(\tau)$** : τ est la durée au bout de laquelle, le régime transitoire a eu lieu à 63 %, autrement dit il en reste 37 %.
 1. Déterminer la valeur de la tension finale $u_c(\infty)$ atteinte au bout d'un temps très long (resp. $u_c(0^+)$).
 2. Calculer $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37u_c(0^+)$).
 3. Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe $u_c(t)$ d'ordonnée $0,63 \times u_c(\infty)$ (resp. $0,37u_c(0^+)$).
- **2^{ème} méthode en utilisant la tangente à l'origine** :
 1. Tracer la tangente à l'origine à la courbe $u_c(t)$.
 2. Tracer l'asymptote à la courbe $u_c(t)$ (valeur atteinte pour $t \rightarrow +\infty$).
 3. L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote est τ .

Application 1 : Lectures graphiques

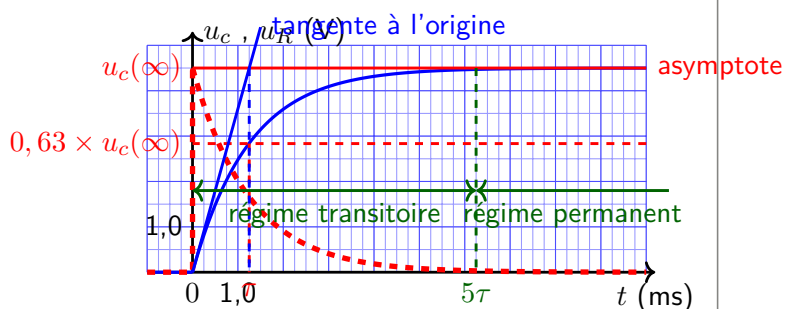
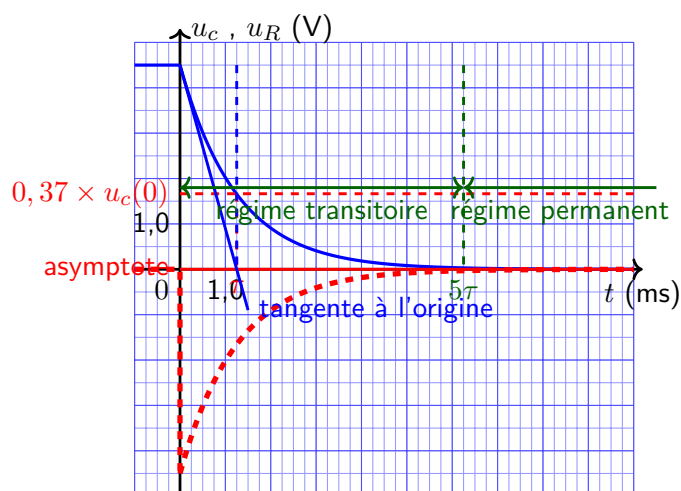
On donne les évolutions de la tension aux bornes du condensateur (en trait plein) et de la tension aux bornes de la résistance (en traits pointillés) au cours du temps.

1. Commenter le comportement de ces deux tensions à $t = 0$.
2. Identifier la courbe correspondant à la charge du condensateur (=réponse à un échelon de tension), et celle correspondant à la décharge (=régime libre).

Sur la courbe de gauche, u_c diminue au cours du temps pour tendre vers 0, c'est la décharge du condensateur. La courbe de droite correspond à la charge du condensateur : u_c est initialement nulle, puis à la fin elle présente une valeur non nulle.

3. Identifier sur chaque courbe le régime permanent initial, le régime transitoire et le régime permanent final.
4. Déterminer graphiquement le temps caractéristique du circuit.

On lit $\tau = 1,25 \text{ ms}$



II.2. Méthodes générales

✕ Méthode Tout exercice d'électricité doit commencer par : ✕

- la représentation du schéma du circuit étudié ;
- L'indication sur le circuit de toutes les intensités (une par branche) et tensions (une aux bornes de chaque dipôle) : flèche et nom.

II.2.a. État final

✕ Méthode Comment déterminer le régime permanent ? ✕

Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du circuit, c'est-à-dire les tensions et intensités dans le circuit une fois le nouveau régime permanent atteint.

1. Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau **régime permanent** atteint en remplaçant les **condensateurs par un interrupteur ouvert** et les **bobines par un fil**.
2. En déduire les tensions aux bornes des fils et les intensités à travers les interrupteurs ouverts qui sont nulles.
3. Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

II.2.b. Conditions initiales

Compétences

*** Capacité : Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine ***

✕ Méthode Comment déterminer les conditions initiales ? ✕

1. Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.
2. Utiliser la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).
3. Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$.

II.2.c. Établir l'équation différentielle

Compétences

*** Capacité : Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles ***

✕ Méthode Comment établir l'équation différentielle vérifiée par la grandeur électrique s ? ✕

1. Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont du être représentées sur le circuit précédemment).
Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.
2. Écrire toutes les relations indépendantes possibles :
 - lois des mailles indépendantes (attention aux redondances) ;
 - lois des nœuds (attention aux redondances) ;
 - relations entre intensité et tension pour tous les dipôles.
3. Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur électrique qui nous intéresse.

4. L'écrire sous forme canonique :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{s(\infty)}{\tau}$$

avec s la grandeur électrique qui nous intéresse (une tension ou une intensité ou une charge) ;
 τ la constante de temps du circuit ;
 $s(\infty)$ la valeur qu'atteint s en régime permanent.

II.2.d. Résoudre l'équation différentielle

✕ **Méthode** Comment résoudre l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = B$ (E) ? ✕

La **solution générale** d'une telle équation différentielle s'écrit :

$$y(t) = y_H(t) + y_P$$

avec

1. y_H la **solution générale de l'équation homogène (sans second membre)** $\frac{dy_H}{dt} + \frac{y_H}{\tau} = 0$ (EH) qui s'écrit :

$$y_H(t) = K e^{-t/\tau} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R} \text{ une constante d'intégration}$$

2. y_P une **solution particulière de (E), recherchée sous la forme du second membre**, ici constant.

On recherche une solution y_P constante qui vérifie (E) : $0 + \frac{y_P}{\tau} = B$, soit $y_P = B\tau$.

3. Ainsi la solution générale de (E) s'écrit :

$$y(t) = y_H(t) + y_P \quad \text{soit} \quad y(t) = K e^{-t/\tau} + B\tau$$

4. Il reste à **déterminer la constante d'intégration** K à l'aide de la condition initiale $y(t=0)$.

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** La constante d'intégration se détermine sur la solution générale de l'équation différentielle, et **jamais** sur la solution homogène.

II.3. Étude du régime libre d'un circuit RC (décharge du condensateur)

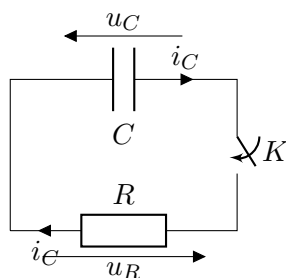
Compétences

*** Capacité : Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension ***

Un circuit composé d'éléments résistifs, de condensateurs ou de bobines, peut évoluer à partir d'un état initial dans lequel l'un des éléments contient une énergie emmagasinée. Si aucun générateur ne figure dans le circuit, l'évolution est dite **libre**, elle conduit généralement à une dissipation de l'énergie initiale dans les éléments résistifs, pendant une durée caractéristique notée τ .

Application 2 : Décharge d'un condensateur

Soit le circuit suivant :



Conditions initiales (CI) À $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert et le condensateur est chargé.

$$\begin{cases} u_C(t = 0^-) = E = 5 \text{ V} \\ q(t = 0^-) = C \times E \\ i(t = 0^-) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

Fig. 1 Circuit RC. $C = 1 \mu\text{F}$ et $R = 10 \text{ k}\Omega$.

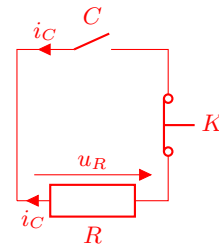
À $t = 0$, on ferme K instantanément. On assiste à la décharge du condensateur dans la résistance.

1. Déterminer les expressions de u_C et u_R en régime permanent.

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Le circuit équivalent est donc représenté ci-contre.

Le circuit étant ouvert, $i_C = 0$ donc d'après la loi d'ohm $u_R = Ri_C = 0$.
Or d'après la loi des mailles

$$u_R + u_C = 0 \quad \text{donc} \quad u_C = -u_R = 0.$$



2. Quelle propriété particulière possède la tension u_C aux bornes d'un condensateur? En déduire la valeur de $u_C(0^+)$ (juste après la fermeture de l'interrupteur). Puis en déduire celle de $q(0^+)$.

La tension u_C est une fonction continue donc $u_C(0^-) = u_C(0^+) = E$. Or $q = Cu_C$ donc $q(0^+) = CE$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q aux bornes du condensateur.

La loi des mailles indique

$$u_R + u_C = 0 \quad (1)$$

$$Ri_C + u_C = 0 \quad (2)$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (3)$$

Soit l'équation différentielle du premier ordre sans second membre décrivant la décharge d'un condensateur à travers une résistance :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0.$$

4. L'écrire sous forme canonique

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0$$

en identifiant la constante de temps τ .

Par identification, on déduit que $\tau = RC$. Par analyse dimensionnelle, τ a la dimension d'un temps : c'est le temps caractéristique de décharge.

5. Résoudre l'équation différentielle.

Il n'y a pas de second membre donc la solution générale correspond à la solution homogène, c'est à dire

$$q(t) = A \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

où A est une constante d'intégration déterminée à l'aide des CI. D'après les CI,

$$q(t=0) = CE = A \quad \text{donc} \quad q(t) = CE \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right).$$

6. En déduire l'expression de la tension u_C et de l'intensité i_C .

$$u_C = \frac{q}{C} = E \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad \text{et} \quad i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{-CE}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right).$$

7. Exprimer $u_C(t = \tau)$ en fonction de E et d'un coefficient numérique. Commenter.

$$u_C(t = \tau) = E \exp(-1) = 0,37E.$$

On retrouve la valeur utilisée pour déterminer graphiquement τ .

8. Tracer l'allure de la tension u_C en fonction du temps et y indiquer les régimes transitoire et permanent. Tracer également les allures de i_C et q en fonction du temps.

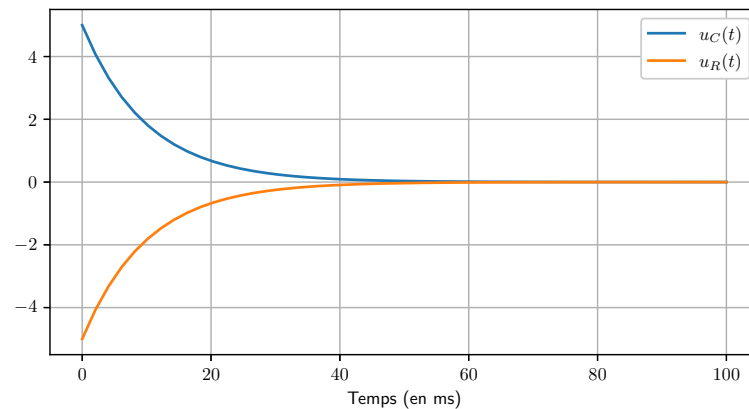
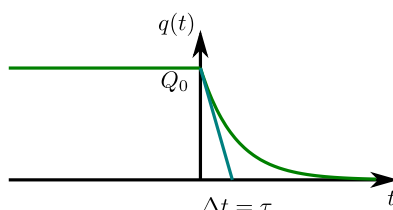
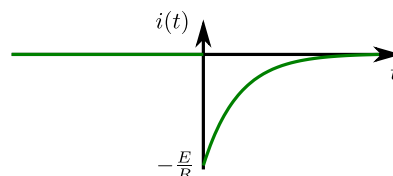


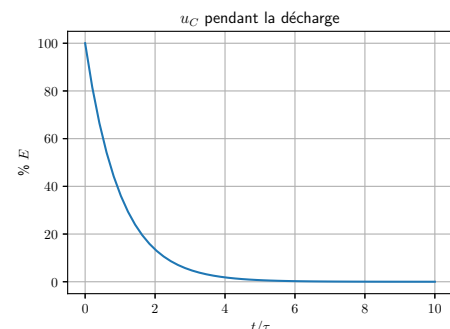
Fig. 2 Relevé expérimental. ⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** Définir sur le graphe le régime transitoire, le régime permanent et la tangente à l'origine.



(a) Charge $q(t)$.



(b) Intensité $i_C(t)$.



(c) Tension $u_C(t)$.

Fig. 3 Décharge libre d'un condensateur.

9. Que remarquez-vous au sujet de l'intensité i_C en $t = 0$?

L'intensité est discontinue en $t = 0$. Seule la tension et la charge sont continues en $t = 0$ pour un condensateur.

Remarque

Le temps de réponse du système, c'est-à-dire la durée du régime transitoire, est **conventionnellement de 4.6τ en sciences physiques**. Cela correspond à $u_C(4.6\tau) = 0.01u_C(0)$: c'est le critère à 99%.

Cela est valable pour toutes les grandeurs électriques. En SI, on retient le critère de 3τ pour lequel $u_C(3\tau) = 0.05u_C(0)$: c'est le critère à 95%.

En ordre de grandeur, le temps du régime transitoire est le même.

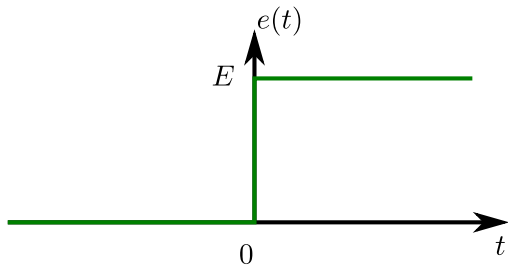
II.4. Réponse à un échelon de tension ou réponse indicielle

Nous ne traitons dans cette section que des systèmes évoluant sous l'effet d'une contrainte extérieure indépendante du temps. A l'instant zéro, la valeur de la contrainte extérieure est brutalement modifiée et le système doit s'y adapter. La période pendant laquelle le système évolue constitue le **régime transitoire**. Lorsque plus aucune grandeur ne dépend du temps, le système est en **régime permanent**.

Remarque

Lorsque la contrainte extérieure est ramenée à 0, on est en régime libre.

Un échelon de tension est un signal électrique $e(t)$ de la forme suivante :



$$\begin{cases} t < 0 : e(t) = 0 \\ t \geq 0 : e(t) = E. \end{cases} \quad (4)$$

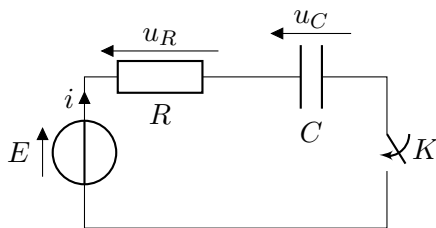
II.5. Cas du circuit RC soumis à un échelon de tension

Compétences

*** Capacité : Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension ***

Application 3 : Charge du condensateur

On réalise le circuit suivant :



Conditions initiales À $t = 0^-$:

$$\begin{cases} q(t = 0^-) = 0 \\ u_C(t = 0^-) = 0 \\ i(t = 0^-) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Fig. 4 Circuit RC soumis à un échelon de tension.

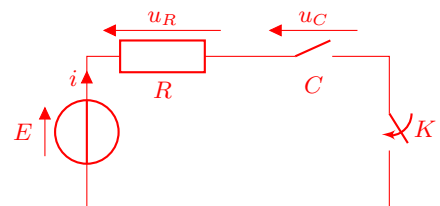
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le circuit RC série est alors soumis à un échelon de tension.

- Déterminer les expressions de u_C , u_R et i une fois le nouveau régime permanent atteint.

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Le circuit équivalent est donc représenté ci-contre.

Le circuit étant ouvert, $i = 0$ donc d'après la loi d'ohm $u_R = Ri = 0$. Or d'après la loi des mailles

$$E = u_R + u_C \quad \text{donc} \quad u_C = E.$$



- Quelle propriété particulière possède la tension u_C aux bornes d'un condensateur ? En déduire la valeur de $u_C(0^+)$ (juste après la fermeture de l'interrupteur). Puis en déduire celle de $q(0^+)$.

La tension u_C est une fonction continue donc $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$. Or $q = Cu_C$ donc $q(0^+) = 0$.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C .

Appliquons la loi des mailles :

$$u_R + u_C - E = 0.$$

Soit

$$Ri + u_C = E \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_C}{dt}.$$

On obtient finalement une équation différentielle du premier ordre avec un second membre :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC} \quad (6)$$

- L'exprimer sous la forme canonique

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{u_C + \infty}{\tau}$$

en exprimant les constantes τ et $u_C(+\infty)$.

On pose comme précédemment $\tau = RC$, la constante de temps. On reconnaît $u_C(+\infty) = E$ comme établi en question 1.

5. Résoudre l'équation différentielle.

Il y a présence d'un second membre, l'équation différentielle n'est plus homogène. Il faut rechercher :

- la solution générale de l'équation homogène : $u_{CH} = B \exp -\frac{t}{\tau}$;
- une solution particulière de l'équation complète : on la recherche sous la même forme que le second membre soit ici constante.

Injectons la solution $u_{CP} = C^{st}$ dans l'équation différentielle Éq 6 : $\frac{du_{CP}}{dt} + \frac{u_{CP}}{RC} = \frac{E}{RC}$ soit $u_{CP} = E$.

La solution totale étant la somme de u_{CH} et de u_{CP} , on a

$$u_C = B \exp \frac{-t}{\tau} + E.$$

La constante B se détermine à l'aide des CI : $u_C(t=0) = B + E = 0$, donc $B = -E$.

Finalement

$$u_C = E \left[1 - \exp \frac{-t}{\tau} \right]. \quad (7)$$

6. En déduire l'expression de l'intensité $i(t)$ puis celle de u_R .

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} \exp \frac{-t}{\tau} \text{ donc on en déduit } u_R = E \exp \frac{-t}{\tau}.$$

7. Exprimer $u_C(t = \tau)$ en fonction de E et d'un facteur numérique. Commenter.

$$u_C(t = \tau) = E [1 - \exp -1] \approx 0,63E.$$

On retrouve le coefficient utilisé pour déterminer graphique la constante τ lors de la charge.

8. Tracer les allures de u_C et i en fonction du temps. Commenter l'allure de l'intensité en $t = 0$.

Fig. 5 Charge du condensateur.

En Fig. 5, on vérifie la continuité de la tension aux bornes du condensateur u_C et la discontinuité du courant i_C en $t = 0$.

Lorsqu'on applique une tension continue sur une branche d'un circuit contenant un condensateur, le courant circule que pendant un temps très bref. Les électrons s'accumulent sur une des armatures du condensateur. À cause de l'isolant, ils ne peuvent traverser le condensateur. Il n'y a plus de circulation de charges, donc $I \rightarrow 0$. Le condensateur est chargé. La tension à ses bornes est maximale, c'est la valeur de la tension à vide E du générateur. u_R s'annule car aucun courant ne circule.

III. Bilan énergétique

Compétences

Stockage et dissipation d'énergie *** Capacité : Stockage et dissipation d'énergie : réaliser des bilans énergétiques ***

✕ Méthode Comment réaliser des bilans de puissance et d'énergie ? ✕

1. Écrire la loi des mailles.
2. Multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit.
3. Identifier chaque terme de la relation obtenue en terme de puissance algébriquement fournie (dipôles en

convention générateur) ou algébriquement reçue (dipôles en convention récepteur), donner leur interprétation et vérifier la conservation de la puissance, donc de l'énergie.

- Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique.

Application 4 : Bilan énergétique lors de la décharge d'un condensateur

- Établir le bilan de puissance de la décharge du condensateur et le mettre sous la forme $P_C + P_{Joule} = 0$ en précisant la signification de chaque terme.

À partir de la loi des mailles, et en la multipliant par i_C , on a $\frac{q}{C} \times i_C + Ri_C^2 = 0$. Or $i_C = \frac{dq}{dt}$,

$$\underbrace{\frac{q}{C} \times \frac{dq}{dt}}_{P_C \text{ puissance reçue par le condensateur}} + \underbrace{Ri_C^2}_{P_R \text{ puissance reçue par la résistance}} = 0. \quad (8)$$

$q(t)$ est une fonction décroissante donc $\frac{dq}{dt} < 0$. Comme $q > 0$, on a $P_C < 0$.

Ainsi, le condensateur se comporte comme un générateur lors de sa décharge.

Pendant la durée dt , le condensateur "reçoit" l'énergie $P_C \cdot dt = \frac{q}{C} \cdot dq < 0$ (il la cède donc en réalité) et le conducteur ohmique reçoit l'énergie $P_R = Ri_C^2 \cdot dt > 0$ et la dissipe par effet Joule vers l'extérieur.

- En déduire le bilan énergétique.

En intégrant entre 0 et ∞ , l'Éq 8 multipliée par dt , on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{q}{C} \cdot dq + \int_0^\infty Ri_C^2 \cdot dt = 0$$

- Exprimer l'énergie initialement stockée par le condensateur, et l'énergie stockée à la fin du régime transitoire. Qu'est devenue cette énergie ?

$$E_{\text{Condensateur}}(t=0) = \frac{1}{2}Cu_C(t=0)^2 = \frac{1}{2}CE^2 \quad \text{et} \quad E_{\text{Condensateur}}(t=+\infty) = 0 \quad \text{car} \quad u_C(t=+\infty) = 0.$$

L'énergie initialement stockée dans le condensateur s'est dissipée dans la résistance par effet Joule.

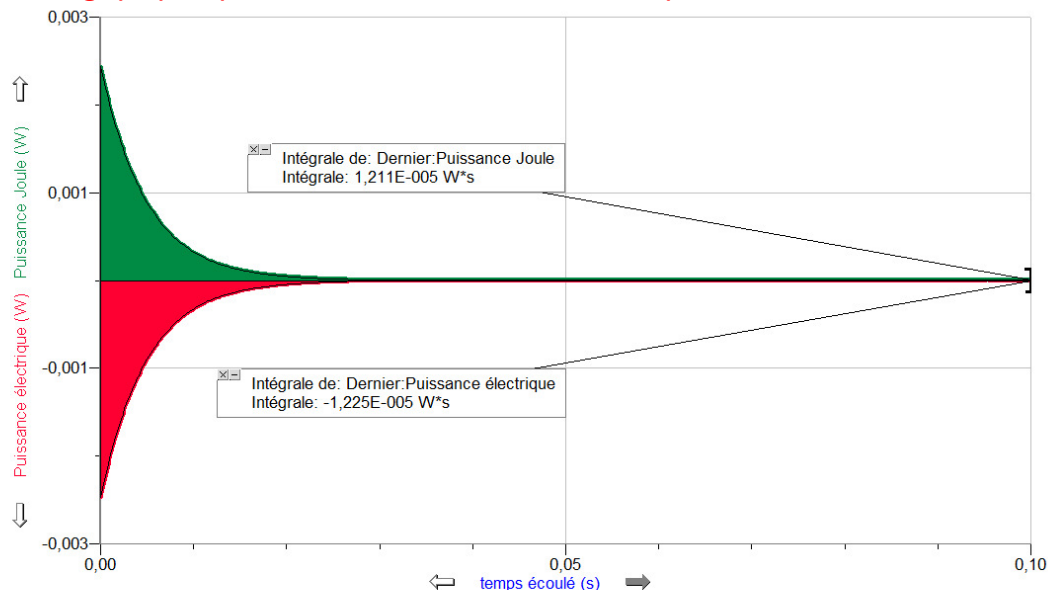
Démonstrons-le :

— par le calcul :

$$\int_0^\infty P_C \cdot dt = \int_0^\infty \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} \cdot dt = \int_0^\infty \frac{q}{C} \cdot dq = \left[\frac{q^2}{2C} \right]_0^\infty = \frac{q^2(\infty)}{2C} - \frac{q^2(0)}{2C} = E(\infty) - E(0) \quad (9)$$

$$\int_0^\infty P_R \cdot dt = \int_0^\infty Ri_C^2 \cdot dt = \int_0^\infty R \times \frac{E^2}{R^2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right] = \frac{CE^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C}. \quad (10)$$

— Par le graphique représentant P_C et P_R en fonction du temps :



On voit bien sur le graphe que P_C est toujours opposée à P_R . On peut calculer les intégrales (i.e. les aires rouges et vertes) et l'on constate qu'elles sont égales aux incertitudes près (signe opposé). L'énergie disponible initialement était $E_{elec}(t=0) = \frac{1}{2}CE^2$

Application 5 : Bilan énergétique lors de la charge d'un condensateur

1. Établir le bilan de puissance de la charge du condensateur que l'on mettra sous la forme $P_C + P_{Joule} = P_g$ en précisant la signification de chaque terme.

Multiplions la loi des mailles par i_C :

$$\begin{aligned}(u_C + Ri_C &= E) \times i_C \\ u_C i_C + Ri_C^2 &= Ei_C \\ \underbrace{u_C C \frac{du_C}{dt}}_{P_C} + \underbrace{Ri_C^2}_{P_R} &= \underbrace{Ei_C}_{P_g}.\end{aligned}\quad (11)$$

On fait ainsi le bilan de puissance du système.

En Fig. 6, on trace l'évolution en fonction du temps de la puissance fournie par le générateur P_g , celle reçue par le condensateur P_C et celle reçue par la résistance P_R . On s'aperçoit qu'à chaque instant $P_g = P_C + P_R$ comme attendu.

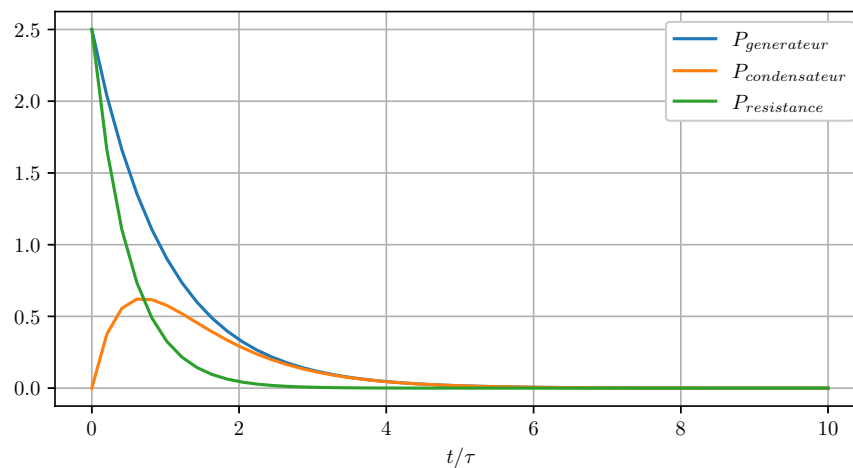


Fig. 6 Évolution des puissances P_g , P_C et P_R en fonction du temps.

2. En déduire le bilan énergétique et exprimer l'énergie reçue par le condensateur E_C , perdue par effet Joule E_{Joule} et fournie par le générateur E_g .

$$\begin{aligned}E_{condensateur} &= \int_0^\infty u_C \cdot i_C dt = \int_0^\infty u_C C \frac{du_C}{dt} dt = \int_0^\infty C u_C du_C = C \left[\frac{u_C^2}{2} \right]_0^\infty = \frac{CE^2}{2} - 0 = \frac{CE^2}{2}; \\ E_{joule} &= \int_0^\infty u_R \cdot i_C dt = \int_0^\infty Ri_C^2 dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} \exp \frac{-2t}{\tau} dt = -\frac{E^2}{R} \times \frac{\tau}{2} \left[\exp \frac{-2t}{\tau} \right]_0^\infty = \frac{CE^2}{2}; \\ E_{générateur} &= \int_0^\infty E \cdot i_C dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} \exp \frac{-t}{\tau} dt = \frac{E^2}{R} \times (-\tau) \left[\exp \frac{-t}{\tau} \right]_0^\infty = CE^2.\end{aligned}$$

On a bien $E_{générateur} = E_{condensateur} + E_{joule}$.

Ouverture :

De nombreuses méthodes viennent d'être vues dans ce chapitre et appliquées au circuit RC. On retrouve les mêmes résultats avec un circuit RL : régime libre, réponse indicielle... L'énergie emmagasinée sous forme magnétique s'écrit $E_L = \frac{1}{2}Li^2$.