TD 5 : Oscillateurs harmoniques en régime libre

À préparer : Exercices 1, 2.1, 3, 6, 7 et 9

Compétences	Capacités
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique. La résoudre compte tenu des conditions initiales. Réaliser un bilan énergétique.

Exercice 1 : Solutions de l'équation du mouvement ♢

Soit l'équation différentielle homogène des oscillateurs harmoniques :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 \quad \text{une constante.}$$

Vérifier que $x_1(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ et $x_2(t) = C\sin(\omega_0 t + \phi)$ sont bien des solutions de l'équation différentielle sans second membre des oscillateurs harmoniques.

Il suffit d'injecter chaque solution dans l'équation différentielle.

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t && \textbf{et} && x_2(t) = C\sin(\omega_0 t + \phi)\\
\dot{x}_1(t) &= -\omega_0 A\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t && \textbf{et} && \dot{x}_2(t) = \omega_0 C\cos(\omega_0 t + \phi)\\
\ddot{x}_1(t) &= -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t - \omega_0^2 B\sin\omega_0 t && \textbf{et} && \ddot{x}_2(t) = -\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \phi)\\
\ddot{x}_1(t) &= -\omega_0^2 x_1(t) && \textbf{et} && \ddot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_2(t)\\
\textbf{DONC}\quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= 0 && \textbf{et} && \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0.
\end{aligned}$$

x_1 et x_2 sont effectivement des solutions de cette équation différentielle.

Exercice 2 : Caractéristiques du mouvement ♢

1. Une masse de 0,5 kg est attachée à un ressort horizontal idéal, on néglige les forces de frottements. La masse effectue une oscillation complète en 2,00 s. L'amplitude des oscillations vaut 0,40 m. À l'instant initial, la masse est lâchée sans vitesse.

   (a) Déterminer la période T, la fréquence f et la fréquence angulaire ou pulsation ω des oscillations.

   La masse effectue une oscillation complète en 2,00 s donc $\boxed{T = 2{,}00\,\text{s}}$. On en déduit la fréquence $\boxed{f = \frac{1}{T} \overset{AN}{=} 0{,}5\,\text{Hz}}$ ainsi que la pulsation $\boxed{\omega = 2\pi f \overset{AN}{=} 3{,}14\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

   (b) Déterminer la constante de raideur k du ressort.

   On sait que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc

   $$\boxed{k = m\omega^2 \overset{AN}{=} 0{,}5 \times 3{,}14^2 = 5\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}.}$$

   (c) Représenter $x(t)$ lorsque l'origine du repère est sur le bâti. On indiquera sur le graphique les valeurs remarquables.

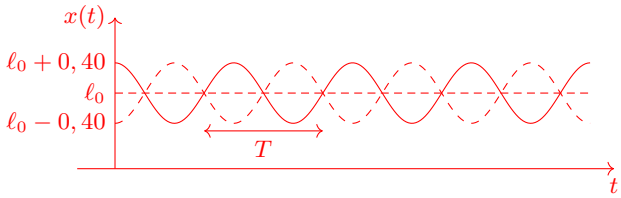
   On peut écrire que

   $$x(t) = C\sin(\omega t + \phi) + \ell_0$$

   avec ℓ_0 la longueur à vide du ressort (voir cours pour la résolution). L'amplitude des oscillations valant 0,40 m, on a $C - \ell_0 = 0,40$. Comme la vitesse initiale est nulle, on a $\dot{x}_2(t=0) = \omega C\cos(\phi) = 0$ soit $\cos\phi = 0$ d'où $\phi = \pi/2 \mod \pi$. Puisque $\sin(x + \pi/2) = -\cos x$. La solution générale s'écrit donc

   $$x(t) = \pm C\cos\omega t + \ell_0,$$

   le signe $\pm$ dépendant de la position initiale de la masselotte (à droite ou à gauche de la position d'équilibre du ressort). On en déduit le graphe ci-dessous



(d) Donner l'expression algébrique de $x(t)$ quand $x = 0{,}2\,\text{m}$ est la position d'équilibre du système {ressort-masse}.

Avec les notations précédentes, $\ell_0 = 0{,}2\,\text{m}$ donc

$$\boxed{x(t) = \pm 0,40\cos(3t) + 0,20}$$ **s'exprimant en m.**

2. Le mouvement d'un oscillateur harmonique est décrit par la loi horaire : $x(t) = 0,75\cos(62t + 0,3)$, les unités employées étant celle du système international (S.I.). Déterminer l'amplitude, la période et la phase à l'origine du mouvement.

— **L'amplitude est de 0,75 m ;**
— **La période est de $\frac{1}{62} = 16\,\text{ms}$;**
— **La phase à l'origine est de 0,3 rad.**

3. Une particule vibre autour d'une position d'équilibre prise comme origine avec une fréquence de 150 Hz et une amplitude de 2 mm. La particule part sur la droite depuis la position d'équilibre. L'axe Ox est aussi dirigé vers la droite. Écrire l'équation horaire du mouvement sous la forme $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ en utilisant les unités S.I.

On a :

— $A = 2\,\text{mm}$;
— $\omega_0 = 2\pi f_0 \overset{AN}{=} 942\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;
— **À $t = 0$, la particule est en sa position d'équilibre, donc $x(t=0) = 0 = A\cos\phi$ ce qui implique $\phi = \pm\pi/2$. Par ailleurs, puisque la particule part à $t = 0$ dans le sens des $x > 0$, $\dot{x}(t=0) > 0$. Or $\dot{x}(t=0) = -\omega_0 A\sin\phi > 0$ donc il faut que $\sin\phi < 0$, (A étant positif) donc il faut choisir $\phi = -\pi/2$. Ainsi,**

$$\boxed{x(t) = \textbf{0,002}\cos\left(942t - \pi/2\right).}$$

Exercice 3 : Représentation graphique ♢

On a réalisé l'acquisition de la position $x(t)$ d'un oscillateur harmonique en fonction du temps. En modifiant les éléments constitutifs de cet oscillateur, on obtient les quatre oscillogrammes suivants. Les échelles sont les mêmes pour les quatre acquisitions (1 s/div en abscisse et 1 m/div en ordonnée).

Précisez pour chacun des cas, les valeurs de la période propre, de la pulsation propre, de l'amplitude et de la phase à l'origine des temps.

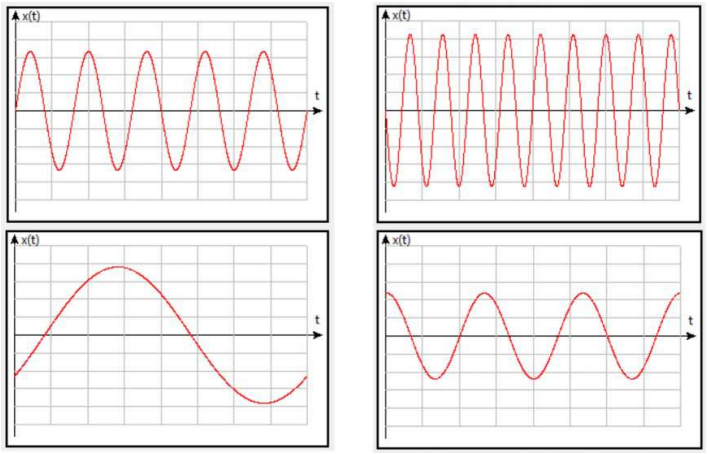


Fig. 1 Quatre acquisitions de la position $x(t)$ d'un oscillateur harmonique en fonction du temps.

Exercice 4 : Caractéristiques du mouvement en fonction des CI ♢

Soit une masse accrochée à un ressort horizontal et dont la position vérifie l'équation différentielle des oscillateurs harmoniques. On notera $x_{\text{eq}} \neq 0$ la position d'équilibre de la masse. Initialement, à $t = 0\,\text{s}$, la masse est située à la position $x_0 > 0\,\text{m}$ et ne possède pas de vitesse initiale.

1. Donner l'expression canonique de l'équation différentielle vérifiée par la position x de la masse.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle puis tracer les variations de x en fonction du temps en indiquant les valeurs remarquables. On notera x_{eq} l'abscisse de la position d'équilibre.

La solution générale s'écrit

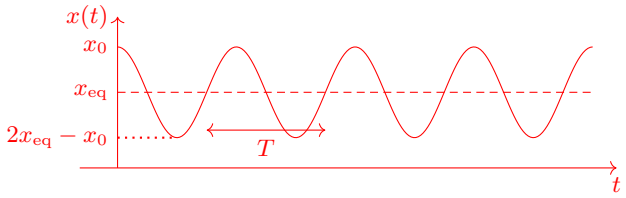
$$x(t) = x_H(t) + x_P = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{\text{eq}}.$$

Déterminons les constantes A et B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t=0) \overset{CI}{=} x_0 = A + x_{\text{eq}} \\ \dot{x} = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t \end{cases} \quad \textbf{soit} \quad \begin{cases} A = x_0 - x_{\text{eq}} \\ \dot{x}(t=0) \overset{CI}{=} 0 = \omega_0 B \end{cases} \quad \textbf{soit} \quad B = 0.$$

Ainsi, on aboutit à

$$\boxed{x(t) = (x_0 - x_{\text{eq}})\cos\omega_0 t + x_{\text{eq}}.}$$



Désormais, initialement, à $t = 0\,\text{s}$, la masse est lancée depuis sa position d'équilibre x_{eq} avec une vitesse initiale $v_0 \neq 0$.

3. Déterminer la loi d'évolution $x(t)$ de la position de la masse M.

La solution générale s'écrit

$$x(t) = x_H(t) + x_P = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{\text{eq}}.$$

Déterminons les constantes A et B à l'aide des conditions initiales :

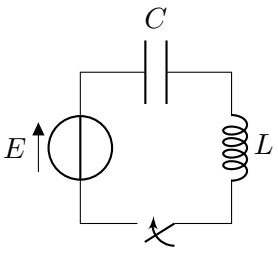
$$\begin{cases} x(t=0) \overset{CI}{=} 0 = A + x_{\text{eq}} \\ \dot{x} = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t \end{cases} \quad \textbf{soit} \quad \begin{cases} A = -x_{\text{eq}} \\ \dot{x}(t=0) \overset{CI}{=} v_0 = \omega_0 B \end{cases} \quad \textbf{soit} \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Ainsi, on aboutit à

$$\boxed{x(t) = -x_{\text{eq}}\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_{\text{eq}}.}$$

Exercice 5 : Charge d'un circuit LC ♢

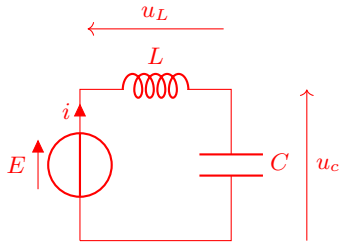
On étudie le circuit ci-contre. Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem E constante au condensateur et à la bobine.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit.

Loi des mailles : $u_c + u_L = E$
Relation du condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$
Relation de la bobine : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
Ainsi $u_c + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E$
On dérive par rapport au temps : $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0$
Avec la relation du condensateur : $\frac{i}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0$
Enfin $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{LC} = 0}$
Que l'on identifie avec $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i = 0.}$

Pour $t > 0$:



2. Identifier la pulsation propre du circuit.

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

3. La résoudre compte tenu des conditions initiales.

La solution générale s'écrit $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ **dont les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales.**

Pour $t < 0$**, le condensateur est déchargé, donc** $u_c(0^-) = 0$**. Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc** $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$**.**

Pour $t < 0$ **aucun courant ne circule, donc** $i(0^-) = 0$**. Or l'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc** $i(0^+) = i(0^-) = 0$**.**

$i(0^+) = A = 0$

Loi des mailles à $t = 0$ **:** $u_L(0^+) + u_C(0^+) = E$**, soit** $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + 0 = E$

Enfin : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{L} = B\omega_0$

Soit $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

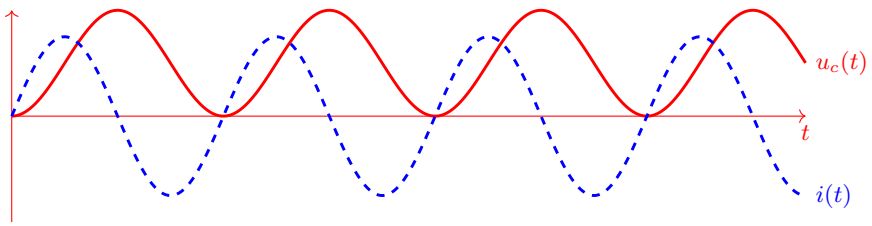
4. En déduire l'expression de la tension aux bornes du condensateur.

Loi des mailles :

$$\begin{aligned} u_c(t) &= E - u_L(t) \\ &= E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ &= E - L\frac{E}{L\omega_0}\omega_0\cos(\omega_0 t) \\ &= E - E\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

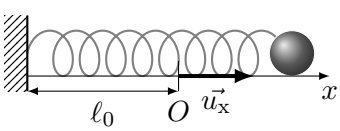
Soit $\boxed{u_c(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))}$

5. Représenter les allures de $u_c(t)$ et $i(t)$.

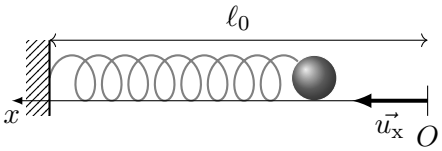


Exercice 6 : Forces de rappel élastique ♢

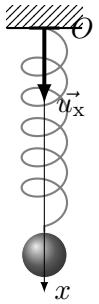
Pour chaque situation ci-dessous, exprimer la force de rappel élastique en fonction de k, ℓ_0 (ou ℓ_{eq}), x et $\vec{u_x}$.
🔥🔥🔥 **Attention !** On fera particulièrement attention au sens de $\overrightarrow{u_{ext}}$ par rapport à $\vec{u_x}$ et à la relation entre ℓ et x (et si besoin d'autres constantes).



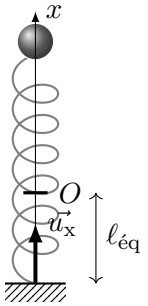
(1) Situation 1.



(2) Situation 2.

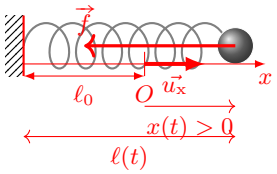


(3) Situation 3.

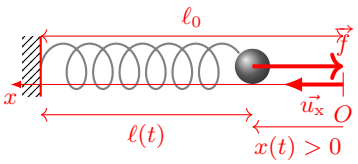


(4) Situation 4.

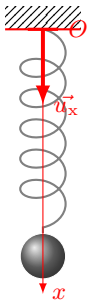
1. **Situation 1 :**
   a) $\vec{u_x}$ est dans le sens d'allongement du ressort, donc $\boxed{\vec{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_x}}$
   b) Vérifions la cohérence :
   Si $\ell(t) > \ell_0$, $\vec{f}$ doit être dirigé vers le point d'attache, donc $\vec{f} \cdot \vec{u_x} < 0$.
   La formule proposée est bien cohérente avec cela, car pour $\ell(t) > \ell_0$, $(\ell(t) - \ell_0) > 0$, donc $-k(\ell(t) - \ell_0) < 0$.
   c) D'après le schéma, on peut écrire que $\ell(t) = \ell_0 + x(t)$, avec sur la configuration représentée, $x(t) > 0$ et $\ell(t) > \ell_0$. Ainsi $\boxed{\vec{f} = -kx(t)\vec{u_x}}$.
   Vérifions la cohérence, sur le schéma, $x(t) > 0$ et la force est dans le sens opposé à $\vec{u_x}$. D'après la formule, pour $x(t) > 0$, $\vec{f} \cdot \vec{u_x} < 0$, donc c'est bon !



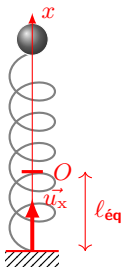
2. **Situation 2 :**
   a) $\vec{u_x}$ est dans le sens de compression du ressort, donc $\boxed{\vec{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)(-\vec{u_x})}$, donc $\boxed{\vec{f} = k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_x}}$
   b) Vérifions la cohérence : Sur le schéma, $\ell(t) < \ell_0$, $\vec{f}$ doit être dirigé dans le sens de l'allongement, d'après le schéma $\vec{f}$ est dans le sens opposé à $\vec{u_x}$ donc $\vec{f} \cdot \vec{u_x} < 0$. La formule proposée est bien cohérente avec cela, car pour $\ell(t) < \ell_0$, $(\ell(t) - \ell_0) < 0$, donc $k(\ell(t) - \ell_0) < 0$.
   c) D'après le schéma, on peut noter que $\ell(t) = \ell_0 - x(t)$ (avec $x(t) > 0$). Ainsi $\vec{f} = k(\ell_0 - x(t) - \ell_0)\vec{u_x}$, soit enfin $\boxed{\vec{f} = -kx(t)\vec{u_x}}$ Vérifions la cohérence, sur le schéma, $x(t) > 0$, et $\vec{f}$ dans le sens opposé à $\vec{u_x}$. OK !



3. **Situation 3 :**
   a) $\vec{u_x}$ est dans le sens d'allongement du ressort, donc $\boxed{\vec{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_x}}$
   b) Vérifions la cohérence : Si $\ell(t) > \ell_0$, $\vec{f}$ doit être dirigé vers le point d'attache, donc est de sens opposé au vecteur $\vec{u_x}$, donc $\vec{f} \cdot \vec{u_x} < 0$. La formule proposée est bien cohérente avec cela, car pour $\ell(t) > \ell_0$, $(\ell(t) - \ell_0) > 0$, donc $-k(\ell(t) - \ell_0) < 0$.
   c) D'après le schéma, en notant que $x(t) > 0$ et $\ell(t) > 0$ on peut écrire que $\ell(t) = x(t)$. Ainsi $\boxed{\vec{f} = -k(x(t) - \ell_0)\vec{u_x}}$ Cohérence vérifiée immédiatement avec le fait que $\ell(t) = x(t)$ et la vérification précédente.



4. **Situation 4 :**
   a) $\vec{u_x}$ est dans le sens d'allongement du ressort, donc $\boxed{\vec{f} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_x}}$
   b) Vérifions la cohérence : Si $\ell(t) > \ell_0$, $\vec{f}$ doit être dirigé vers le point d'attache, donc est de sens opposé au vecteur $\vec{u_x}$, donc $\vec{f} \cdot \vec{u_x} < 0$. La formule proposée est bien cohérente avec cela, car pour $\ell(t) > \ell_0$, $(\ell(t) - \ell_0) > 0$, donc $-k(\ell(t) - \ell_0) < 0$.
   c) D'après le schéma, on note que $\ell(t) = \ell_{eq} + x(t)$ d'où $\boxed{\vec{f} = -k(x(t) + \ell_{eq} - \ell_0)\vec{u_x}}$ Cohérence vérifiée immédiatement avec le fait que $\ell(t) = x(t) + \ell_{eq}$ et la vérification précédente.



Exercice 7 : Oscillateur harmonique vertical ♢♢

On considère un mobile M assimilable à une masse ponctuelle m et pendu verticalement par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'origine du repère est prise en O, point d'accroche du ressort au plafond (voir figure). Le mouvement reste vertical et sans frottement. On note (Oz) l'axe vertical descendant.

1. On accroche une masse $m = 2\,\text{kg}$, le ressort s'allonge de $10\,\text{cm}$. Déterminer la position d'équilibre z_{eq}. En déduire la valeur de la raideur du ressort.

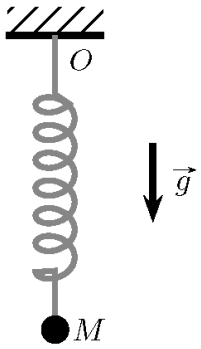
— **Système : Masse ;**
— **Référentiel terrestre ;**
— **Bilan des forces : poids $m\vec{g} = mg\vec{u_z}$ et force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{rap}} = -k\,(z-\ell_0)\,\vec{u_z}$.**

Appliquons le PFD à l'équilibre

$$0 = mg - k\,(z_{eq} - \ell_0) \quad \textbf{soit} \quad \boxed{z_{eq} = \frac{mg}{k} + \ell_0} \quad \textbf{et} \quad k = \frac{mg}{z_{eq} - \ell_0}.$$

Ici, $m = 2\,\text{kg}$ et l'allongement est $z_{eq} - \ell_0 = 10\,\text{cm}$. Ainsi

$$\boxed{k = \frac{mg}{z_{eq} - \ell_0} \overset{AN}{=} 1{,}9 \times 10^2\,\text{N·m}^{-1}.}$$



2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position $z(t)$ du ressort.

On applique le PFD au système { masse M } dans le référentiel terrestre :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\,(z-\ell_0)\,\vec{u_z}.$$

Projettons ce PFD selon l'axe Oz descendant :

$$m\ddot{z} = mg - k\,(z-\ell_0) \quad \textbf{soit} \quad \ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}.$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, il vient

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2\ell_0 \quad \textbf{soit} \quad \boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{eq}}.}$$

3. Proposer un changement de variable afin de mettre l'équation différentielle sous forme canonique sans second membre.

Posons

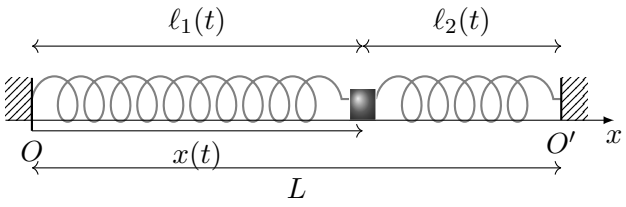
$$\boxed{Z = z - \frac{g}{\omega_0^2} - \ell_0} \quad \textbf{d'où} \quad \dot{Z} = \dot{z} \quad \textbf{et} \quad \ddot{Z} = \ddot{z}.$$

Avec ce changement de variable, on a

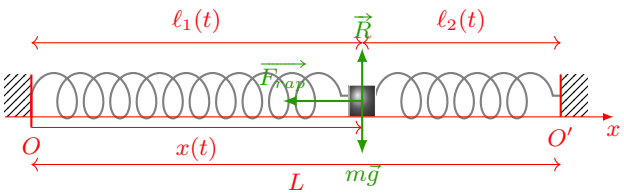
$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0.$$

Exercice 8 : Masse reliée à deux ressorts ♢♢

Une masse m positionnée en M est reliée à deux ressorts horizontaux fixés en O et en O'. La longueur $OO' = L$ est fixe. Cette masse glisse sans frotter sur le sol horizontal. La position de la masse est repérée par l'abscisse x telle que $\vec{OM} = x\vec{u_x}$. Les ressorts ont pour raideur respectives k et k' et pour longueur à vide respectives ℓ_0 et ℓ'_0.



1. Faire un schéma du dispositif.



2. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur la masse.

- **Système : { masse m } ;**
- **Référentiel : terrestre supposé galiléen ;**
- **Bilan des forces :**
  - **poids $m\vec{g}$,**
  - **réaction du sol $\vec{R}$,**

- **force de rappel élastique du ressort 1 (de gauche)** $\overrightarrow{F_{rappel,1}} = -k\,(\ell_1 - \ell_0)\,\vec{u_x} = -k\,(x - \ell_0)\,\vec{u_x}$,
- **force de rappel élastique du ressort 2 (de droite)** $\overrightarrow{F_{rappel,2}} = -k'\,(\ell_2 - \ell'_0)\,(-\vec{u_x}) = k'\,(L - x - \ell'_0)\,\vec{u_x}$,

3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse m.

D'après le PFD, on peut écrire

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \overrightarrow{F_{rappel,1}} + \overrightarrow{F_{rappel,2}}$$

soit après projection $\begin{cases} m\ddot{z} = -mg + R \\ m\ddot{x} = -k\,(x - \ell_0) + k'\,(L - x - \ell'_0) \end{cases}$

4. Quelle est la position d'équilibre x_{eq} ?

À l'équilibre, $\ddot{z} = \ddot{x} = 0$ **d'où**

$$-k\,(x_{\text{eq}} - \ell_0) + k'\,(L - x_{\text{eq}} - \ell'_0) = 0 \qquad \textbf{soit} \qquad \boxed{x_{\text{eq}} = \frac{k\ell_0 + k'\,(L - \ell'_0)}{k + k'}.}$$

5. Établir l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$ en fonction de x_{eq} et d'une pulsation ω_0 que l'on précisera.

Reprenons le PFD projeté sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = -\left(k + k'\right)x + k\ell_0 + k'\,(L - \ell'_0)$$

$$\ddot{x} + \frac{(k + k')}{m}x = \frac{k\ell_0 + k'\,(L - \ell'_0)}{m} = \frac{k + k'}{m}x_{\text{eq}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}} \qquad \textbf{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}}.}$$

6. Donner l'expression algébrique de $x(t)$ sachant qu'à $t = 0\,\text{s}$, la position est $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La solution générale s'écrit

$$x(t) = x_H(t) + x_p = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{\text{eq}}$$

avec A et B deux constantes à déterminer avec les CI. D'ailleurs,

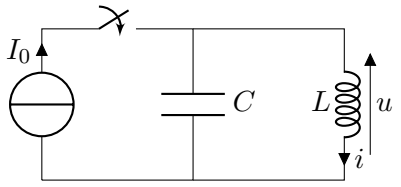
$$\begin{cases} x(t=0) \overset{CI}{=} x_0 \\ \dot{x}(t=0) \overset{CI}{=} 0 \end{cases} \quad \textbf{or} \quad \begin{cases} x(t=0) = A + x_{\text{eq}} = x_0 \\ \dot{x} = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t \end{cases} \quad \textbf{d'où} \quad \begin{cases} A = x_0 - x_{\text{eq}} \\ 0 = \omega_0 B \end{cases} \textbf{ soit } \quad B = 0.$$

Ainsi la solution générale s'écrit

$$\boxed{x(t) = (x_0 - x_{\text{eq}})\cos\omega_0 t + x_{\text{eq}}.}$$

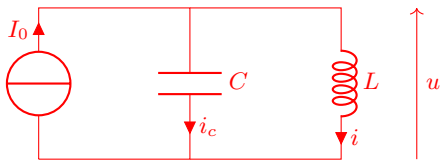
Exercice 9 : Circuit LC parallèle ♢♢

On étudie le circuit ci-contre.
Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de courant en parallèle avec le condensateur et la bobine.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i.

Loi des nœuds : $I_0 = i_c + i$
Relation de la bobine : $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
Relation du condensateur : $i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Soit $i_C = LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$
Ainsi : $I_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i$
Enfin $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{LC} = \frac{I_0}{LC}}$



2. Identifier la pulsation propre du circuit.

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

3. Justifier très proprement $i(0^+)$ et $u(0^+)$. Puis, par utilisation de la loi constitutive de la bobine, en déduire $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Pour $t<0$ aucun courant ne circule, donc $i(0^-)=0$. Or l'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+)=i(0^-)=0$.

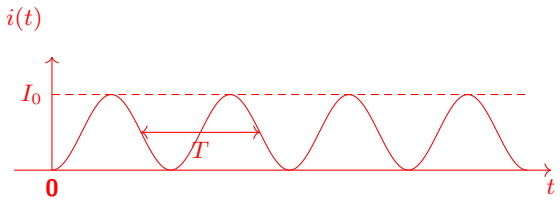
Pour $t<0$, le condensateur est déchargé, donc $u_(0^-)=0$. Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u(0^+)=u(0^-)=0$.

Or $u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{u(0^+)}{L}=0}$

4. Résoudre complètement l'équation différentielle compte tenu des conditions initiales [1].

Solution générale : $i(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+I_0$
D'après les CI : $i(0^+)=0=A+I_0$
et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)=B\omega_0=0$
Ainsi $\boxed{i(t)=I_0(1-\cos(\omega_0 t))}$

5. Représenter l'allure de i en fonction du temps.



Exercice 10 : Oscillations dans un cristal ♢♢♢

Dans un cristal, un atome de masse $1{,}0\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$ effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre. La fréquence est égale à $f_0=1{,}0\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$ et l'amplitude à $X_m=0{,}05\,\mathrm{nm}$. Déterminer :

1. La norme de la vitesse maximale.

Puisque l'atome effectue des oscillations harmoniques, sa position $x(t)$ s'écrit

$$x(t)=X_m\cos(\omega_0 t+\phi)$$

avec X_m l'amplitude de ses oscillations, $\omega_0=2\pi f_0$ la pulsation de ses oscillations et ϕ un éventuel déphasage.
Sa vitesse s'écrit alors

$$\dot{x}=-\omega_0 X_m\sin(\omega_0 t+\phi)\,.$$

Sa vitesse est maximale quand le sinus vaut 1, d'où $\boxed{v_{max}=X_m\omega_0\overset{AN}{=}0{,}05\times10^{-9}\times2\pi\times1{,}0\times10^{12}=3\times10^{2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

2. Son énergie mécanique.

L'énergie mécanique $E_\mathrm{m}=E_\mathrm{c}+E_\mathrm{p}^{élastique}$. Or quand l'énergie cinétique est maximale, l'énergie potentielle est nulle et vice-versa. Ainsi

$$\boxed{E_\mathrm{m}=E_\mathrm{c}^{max}=\frac{1}{2}mv_{max}^2\overset{AN}{=}\frac{1}{2}\times1{,}0\times10^{-26}\times3\times10^{2^2}=4{,}5\times10^{-22}\,\mathrm{J}\approx3\times10^{-3}\,\mathrm{eV}.}$$

3. La norme de son accélération maximale.

Son accélération s'écrit

$$\ddot{x}=-\omega_0^2 X_m\cos(\omega_0 t+\phi)\qquad\text{soit}\qquad\boxed{a_{max}=\omega_0^2 X_m\overset{AN}{=}\left(\times2\pi\times1{,}0\times10^{12}\right)^2\times0{,}05\times10^{-9}=2{,}0\times10^{15}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.}$$

car l'accélération est maximale quand le cosinus vaut -1.

4. La constante de rappel du ressort modélisant les oscillations.

En modélisant le système par un système masse-ressort, on sait que

$$\omega_0=2\pi f_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{k=4\pi^2 f_0^2 m\overset{AN}{=}4\pi^2\times1{,}0\times10^{12^2}\times1{,}0\times10^{-26}=4\times10^{-1}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}.}$$

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle compte tenu des conditions initiales.

Exercice 11 : Ressort inconnu ♢♢♢

On considère un ressort dont les caractéristiques (constante de raideur k et longueur à vide ℓ_0) sont inconnues. On accroche une extrémité du ressort à un point fixe et on accroche une masse m, dont on ne connaît pas la valeur, à l'autre extrémité, le ressort s'allonge alors de 10 cm.
Prévoir la valeur de la période propre des oscillations libres de ce système.

Idées :

- **En l'absence de la masse, le ressort fait une longueur ℓ_0**
- **Une fois la masse accrochée au ressort vertical, le ressort fait une longueur $\ell_{éq} = \ell_0 + 10cm$.**
- **La longueur à l'équilibre est à établir (cf exercices 3 et 4) : $\ell_{éq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$, on en déduit $\frac{m}{k} = \frac{\ell_{éq} - \ell_0}{g}$**
- **En établissant l'équation différentielle du mouvement, on établit la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, et donc la période propre :**

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Il n'y a plus qu'à faire le calcul !