TD 6 : Oscillateurs amortis

À préparer : Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6.6-10

Compétences	Capacités
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.

Exercice 1 : Résolution d'équations différentielles ♢

Résoudre chaque équation différentielle.

1. $2\ddot{u} + 8\dot{u} + 3u = 0$ avec $\begin{cases} u(t=0) = 5 \\ \dot{u}(t=0) = 0 \end{cases}$

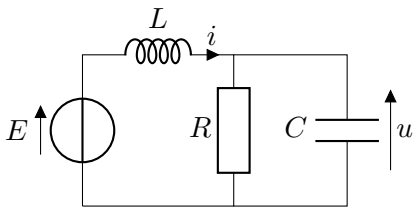
2. $3\ddot{u} + 2\dot{u} + 3u = 0$ avec $\begin{cases} u(t=0) = 5 \\ \dot{u}(t=0) = 0 \end{cases}$

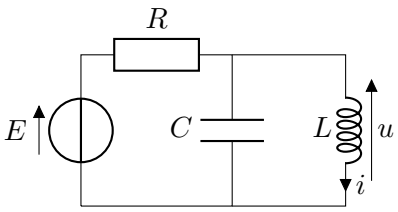
3. $2\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$ avec $\begin{cases} x(t=0) = 5 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$

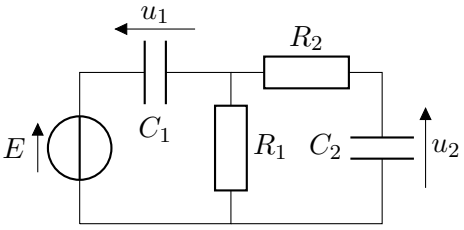
4. $3\ddot{z} + 7\dot{z} + 2z = 10$ avec $\begin{cases} z(t=0) = 5 \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$

Exercice 2 : Étude de régime permanent ♢

Déterminer les différentes intensités et tensions (u, i, u_1, u_2) indiquées ci-dessous lorsque le régime permanent est atteint.







Exercice 3 : Lecture de graphes ♢

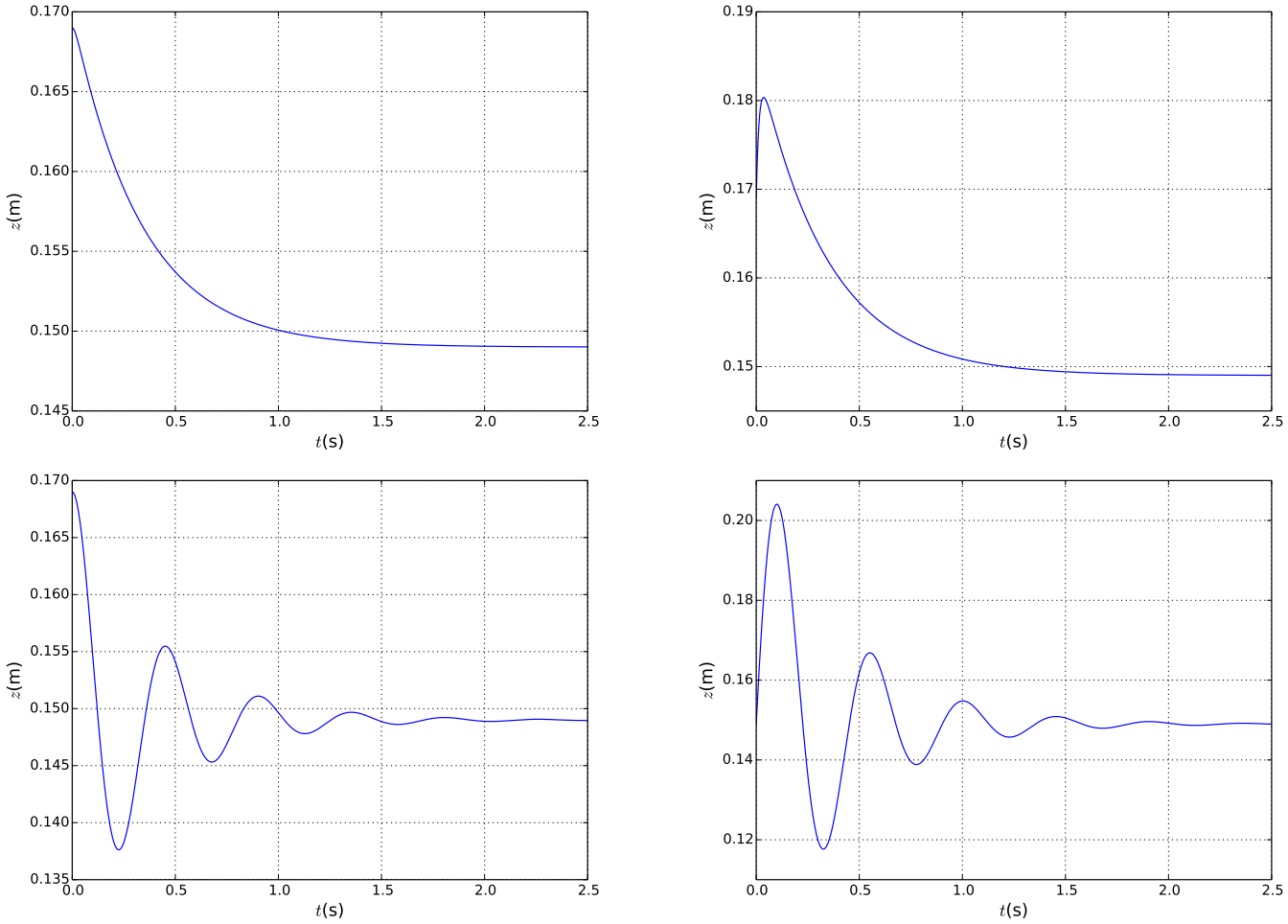
Associer à chaque graphe, le jeu de conditions initiales et le jeu de paramètre correspondant, ci-dessous.

— Les conditions initiales suivantes :

1) $z(0) = z_{éq} + 2{,}0\,\text{cm}$; $\dot{z}(0) = 0\,\text{m/s}$
2) $z(0) = z_{éq}$; $\dot{z}(0) = 1\,\text{m/s}$
3) $z(0) = z_{éq} + 2{,}0\,\text{cm}$; $\dot{z}(0) = 1\,\text{m/s}$

— Les couples de paramètres suivants :

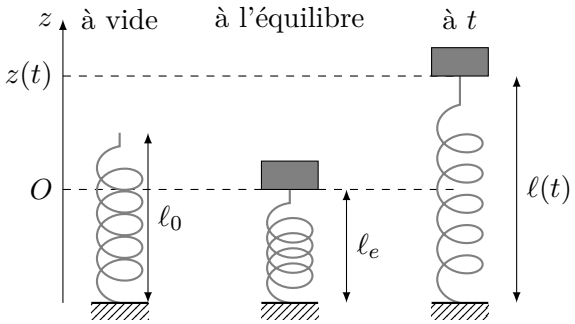
a) $k = 20\,\text{N·m}^{-1}$; $m = 0{,}1\,\text{kg}$; $\alpha = 0{,}5\,\text{kg·s}^{-1}$
b) $k = 20\,\text{N·m}^{-1}$; $m = 0{,}1\,\text{kg}$; $\alpha = 7\,\text{kg·s}^{-1}$



Exercice 4 : Fourche de VTT ♢

La fourche de VTT peut être modélisée par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, associé à un amortisseur dont la force de frottement est $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. On note m la masse appuyant sur la fourche lorsque la vététiste appuie sur le guidon (par exemple en descente).

Données : $m = 20$ kg ; $k = 2,5 \cdot 10^3$ N $\cdot$ m^{-1} ;
$\alpha = 5,0 \cdot 10^2$ N $\cdot$ s $\cdot$ m^{-1} ; $\ell_0 = 1,3$ m ;
$g = 9,8$ m $\cdot$ s^{-2} ; $v_0 = 5,0$ m $\cdot$ s^{-1}



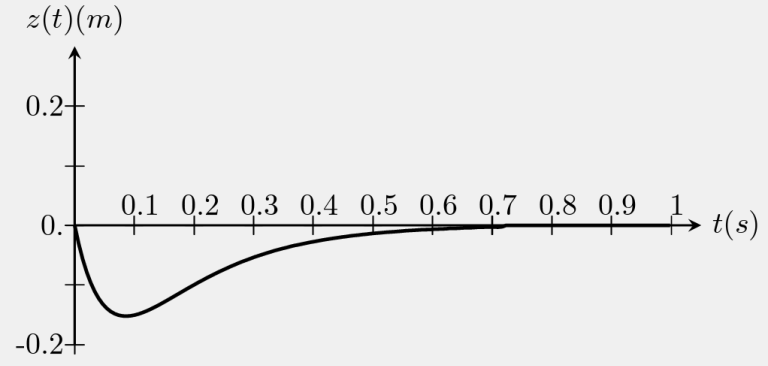
1. La cycliste appuie sur le guidon, avec une masse m. **Établir** l'expression de la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre en fonction de m, g, k et ℓ_0. La calculer. Le ressort est-il comprimé ou étiré ?

La vététiste se réceptionne après un dénivelé. On souhaite établir la forme du mouvement du cycliste suite à ce saut. L'origine du repère est placée à la position d'équilibre.
Les conditions initiales sont $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = -v_0$ (avec $v_0 > 0$, $\dot{z}(0) < 0$ car dirigé vers le sol).

2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la position verticale $z(t) = \ell(t) - \ell_e$ et la mettre sous la forme canonique $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ en exprimant Q et ω_0 [1].
3. **Calculer** Q et ω_0 (en précisant leur unité).
   Quelle est la nature du mouvement de la vététiste (pseudo périodique, critique ou apériodique) ?
   Exprimer puis **calculer** le temps d'amortissement caractéristique compte tenu du régime.

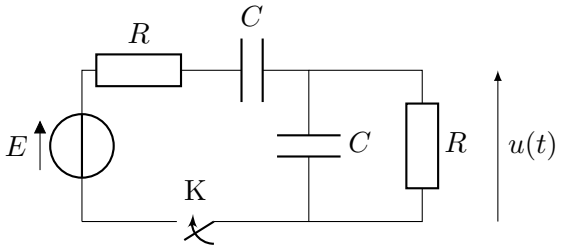
1. NON : il n'y a pas de second membre dans cette équation !

4. **Déterminer** la solution $z(t)$ avec les conditions initiales. On pourra introduire la grandeur $\gamma = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}-1}$.
   Montrer qu'elle peut s'écrire $z(t) = -\dfrac{v_0}{\gamma}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\text{sh}(\gamma t)$
5. La figure ci-dessous représente $z(t)$. De quelle longueur s'enfonce approximativement la fourche ?



Exercice 5 : Pont de Wien ♢♢

On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien.
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C, sont déchargés.
On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux résistances sont identiques.



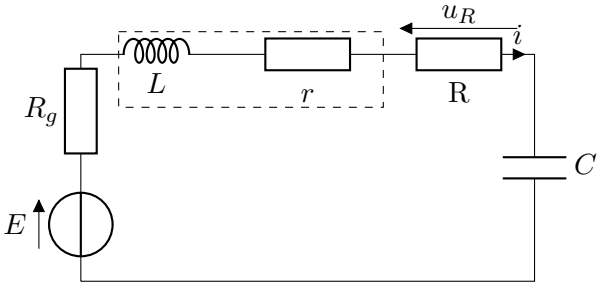
1. **Établir**[2] l'équation différentielle vérifiée par la tension u et montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$\frac{\text{d}^2u}{\text{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\text{d}u}{\text{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

2. **Déterminer** les conditions initiales[3] $u(t=0^+)$ et $\frac{\text{d}u}{\text{d}t}(t=0^+)$.
3. **Résoudre** complètement l'équation différentielle précédente pour déterminer l'expression de $u(t)$. **Représenter** graphiquement son allure.

Exercice 6 : Régime transitoire d'un RLC série ♢♢♢

Un générateur de tension continue E et de résistance interne R_g alimente un circuit RLC série ($C = 0{,}10\,\mu\text{F}$). L'inductance L et la résistance propre r de la bobine sont inconnues.

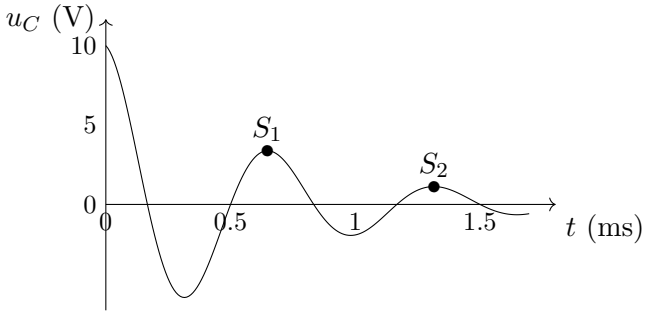


2. Indications :
— Introduire 3 intensités et deux tensions.
— Écrire les 6 équations indépendantes.
— Mélanger les 6 équations pour obtenir une équation différentielle avec uniquement u, pour obtenir : $\omega_0 = 1/(RC)$.

3. Indications :
— Déterminer les tensions aux bornes des condensateurs.
— Exploiter la loi d'Ohm et la loi des nœuds.
— Exploiter la loi des mailles et la loi du condensateur pour conclure : $\frac{\text{d}u}{\text{d}t}(0^+) = \frac{E}{RC}$

1. On attend que le régime permanent soit établi. Préciser alors les valeurs de i, u_L, u_R et u_C.
   Une fois le régime permanent atteint, on remplace l'alimentation (E,R_g) par un fil. On étudie donc la décharge d'un condensateur dans une bobine d'inductance L et de résistance interne r inconnues placées en série avec une résistance R variable.
2. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $u_C(T)$ et la mettre sous la forme canonique :
$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0,$$
   On exprimera ω_0 et Q en fonction des données du problème.
3. Rappeler les conditions de continuité dans une bobine et un condensateur. En déduire les valeurs de $u_C(0)$ et $\dot{u}_C(0)$.

Comme le montre la seconde figure, le régime est pseudo-périodique.



4. Établir que ceci n'est possible que pour une valeur de résistance R inférieure à une résistance maximale $R_{\max}$ dont on donnera l'expression en fonction de r, L et C.
5. Montrer que la solution physique s'écrit sous la forme :
$$u_C(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)$$
   Préciser les valeurs de λ et Ω en fonction de ω_0 et Q ainsi que celles des constantes A et B.
6. On donne les valeurs des deux premiers maxima S_1 et S_2 pour $t > 0$.

	1er maximum	2ème maximum
Tension	$U_1 = 2{,}73\,\text{V}$	$U_2 = 0{,}73\,\text{V}$
Date	$t_1 = 0{,}65\,\text{ms}$	$t_2 = 1{,}29\,\text{ms}$

   En déduire les valeurs expérimentales de la pseudo-période T et de la pseudo-pulsation Ω.
7. On pose $\delta = \ln\frac{U_1}{U_2}$, le décrément logarithmique. Montrer que $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$. En déduire l'expression de Q en fonction de δ.
8. On donne $\delta = 1.28$ et $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \simeq 6$. Évaluer Q et ω_0.
9. À quelle condition peut-on assimiler la pseudo-période T à la période propre ? Cette approximation est-elle vérifiée ici ?
10. Déterminer la valeur numérique de L.

Exercice 7 : Interprétation énergétique du facteur de qualité ♢♢♢

Un circuit électrique est composé d'un interrupteur, d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L, le tout placé en série. On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

1. Établir l'équation différentielle satisfaite par la charge q du condensateur quand l'interrupteur est fermé.
   On se place dans la suite dans le cas d'un amortissement faible, soit $Q \gg 1$.
2. Exprimer $q(t)$ sachant qu'à $t = 0\,\text{s}$ on ferme l'interrupteur et qu'à cet instant la charge vaut q_0.
3. Déterminer la pseudo-période T, ainsi que l'ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire.
4. Représenter l'évolution du système sous la forme $q(t)$.
5. Évaluer $E(t)$ l'énergie contenue dans le circuit à l'instant t.
6. Que dire du signe de $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$?
7. Évaluer la variation relative α d'énergie contenue dans le circuit pendant une pseudo-période :
$$\alpha = \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)}.$$
8. En déduire une caractérisation du coefficient de qualité Q.