# Devoir surveillé de physique n°3 - Correction

## À revoir

- Méthode de résolution d'une équation différentielle insuffisamment connue ;
- La loi d'Ohm n'est valable que pour une résistance ;
- Les tensions / intensités doivent être définies sur un schéma.

## I. Masse percutant un ressort (33 points)

1. (1 point) Tant que la masse n'est pas accrochée au ressort, ce dernier ne subit aucune force et sa longueur est donc égale à sa longueur à vide.
2. (a) (3 points) La rédaction d'un exercice de mécanique : SYSTÈME, RÉFÉRENTIEL, BILAN DES FORCES, SCHÉMA est INDISPENSABLE dans TOUT exercice de mécanique ! Sans ça, la suite n'a pas de sens ! !

   Système : masse $m$

   Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

   Bilan des forces :

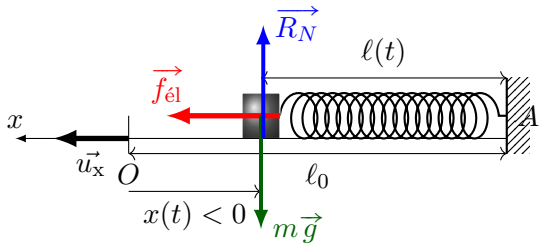
   — poids : $m\vec{g}$

   — réaction normale du support : $\vec{R_N}$

   — force de rappel élastique : $\vec{f_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_x}$, car $\vec{u_x}$ est le vecteur unitaire dirigé dans le sens d'allongement du ressort.

   (b) (4 points)

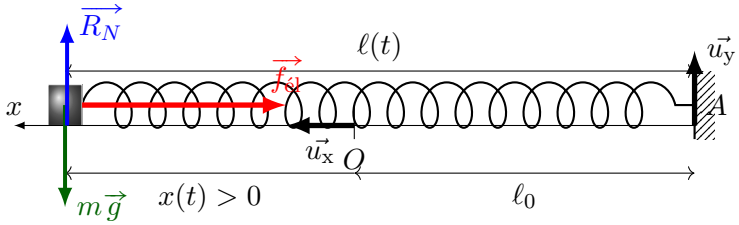
   Pour $M$ entre $O$ et $A$, le ressort est comprimé, et la force est donc dirigée dans le sens d'allongement du ressort.

   $\ell(t) < \ell_0$, le ressort est comprimé, la force tend donc à l'étendre. Elle est ici dirigée de $A$ vers $M$, *i.e.* selon $+\vec{u_x}$.

   L'expression est cohérente : $\ell(t) - \ell_0 < 0$, donc $-k(\ell(t) - \ell_0) > 0$, donc $\vec{f_{\text{él}}}$ selon $+\vec{u_x}$.

   Pour $M$ au-delà de $O$, le ressort est étiré et la force est donc dirigée dans le sens de compression du ressort.

   $\ell(t) > \ell_0$, le ressort est étiré, la force tend donc à le comprimer. Elle est ici dirigée de $M$ vers $A$, *i.e.* selon $+\vec{u_x}$.

   L'expression est cohérente, en effet $\ell(t) - \ell_0 > 0$, donc $-k(\ell(t) - \ell_0) < 0$, donc $\vec{f_{\text{él}}}$ selon $-\vec{u_x}$.

   ATTENTION à l'expression de la force ! Pour un système donné, la force a toujours la même expression, que le ressort soit comprimé ou allongé !

   La force s'écrit TOUJOURS : $\boxed{-k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$

3. (2 points) Un SCHÉMA clair et COMPLÉTÉ avec : $\ell(t)$, $\ell_0$ et $x(t)$ est INDISPENSABLE pour obtenir la relation juste entre ces trois grandeurs.

   L'origine de l'axe étant à la position d'équilibre, d'après le schéma ci-dessus, la longueur instantanée du ressort $\ell(t)$ est reliée à la longueur à vide et à $\ell_0$ par : $\boxed{\ell(t) = \ell_0 + x(t)}$, soit $\ell(t) - \ell_0 = x(t)$, ainsi $\boxed{\vec{f_{\text{él}}} = -kx(t)\vec{u_x}}$

4. (2 points) Pour établir l'équation différentielle du mouvement de la masse pour $t \geq 0$, il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{f_{\text{él}}}$

   Or, le mouvement n'a lieu que selon l'axe $(Ox)$, donc $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u_x}$

   Ainsi, le PFD s'écrit : $m\ddot{x}\vec{u_x} = -mg\vec{u_y} + R_N\vec{u_y} - kx(t)\vec{u_x}$

En égalisant les composantes selon $\vec{u_x}$ : $m\ddot{x} = -kx(t) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x(t) = 0}$

5. (a) (0.5 points) On a bien $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$.

   (b) (0.5 points) Cette équation est celle d'un $\boxed{\text{oscillateur harmonique}}$.

   (c) (1 point) On identifie ainsi la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, qui s'exprime en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

6. (4 points) La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.
   L'énoncé nous donne qu'à l'instant initial : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = -v_0$. Ainsi, on détermine : $x(0) = \boxed{A = 0}$.
   Puis on calcule la dérivée temporelle de la position en fonction du temps : $\dot{x} = B\omega_0\cos(\omega_0 t)$.
   À $t = 0$ : $\dot{x}(0) = B\omega_0 = -v_0$, soit $B = -\frac{v_0}{\omega_0}$.
   Ainsi $\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

7. (1 point) Cohérence des notations : si la position de $M$ est repérée par son abscisse $x$, on notera $X_m$ son amplitude.

8. (5 points) Graphiquement on observe que la période propre vaut $T_0 = 2{,}0\,\text{s}$. Pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3{,}1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$
   On détermine la constante de raideur $k$ à l'aide de l'expression de la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \boxed{k = \omega_0^2 m = 2{,}0\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}}$ Attention aux unités : la masse doit être exprimée en kilogramme (kg). On lit graphiquement l'amplitude : $X_m = 10\,\text{cm}$, or $X_m = \frac{v_0}{\omega_0}$ , soit $\boxed{v_0 = X_m\omega_0 = 0{,}31\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

9. (7 points)

- Énergie cinétique :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ E_c &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \text{or } \dot{x} &= -v_0\cos(\omega_0 t) \\ \text{donc } E_c &= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

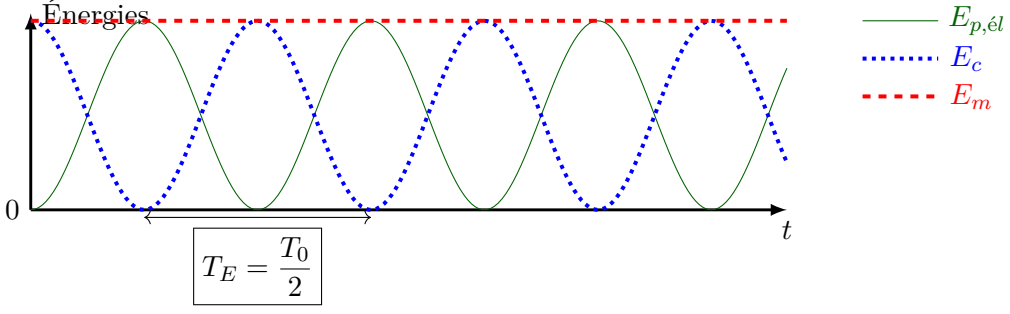
- Énergie potentielle, qui se réduit à l'énergie potentielle élastique, celle de pesanteur étant constante :

$$\begin{aligned} E_{p,él} &= \frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

- Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_{p,él} \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned}$$

Il faut conclure : COMMENTER le résultat. On constate que l'énergie mécanique est constante, ce qui est cohérent avec la modélisation de départ où aucun frottement n'a été pris en compte.



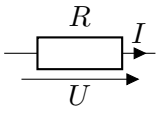

$\boxed{T_E = \frac{T_0}{2}}$

10. (2 points)
L'énergie potentielle dépend du temps en $\sin^2(\omega_0 t)$, en linéarisant (pour identifier la période), on écrit : $\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1 - 2\cos(2\omega_0 t)}{2}$. Il s'agit donc d'une fonction périodique de pulsation $\omega_E = 2\omega_0$, et donc de période $T_E = \frac{T_0}{2}$. Les échanges d'énergie se font deux fois par période propre de l'oscillateur.

# II. Circuit RC (29 points)

11. (1 point) L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires consiste à négliger les temps de propagation de l'information dans un circuit électrique de taille $L$. Cela est vrai tant que $cT \gg L$ où $c$ est la vitesse de la lumière et $T$ la période du signal transmis dans le circuit.

12. (2 points) En convention générateur, la loi d'Ohm indique que $U = -R \times I$. Le produit $U \times I$ correspond à la puissance fournie par la résistance.



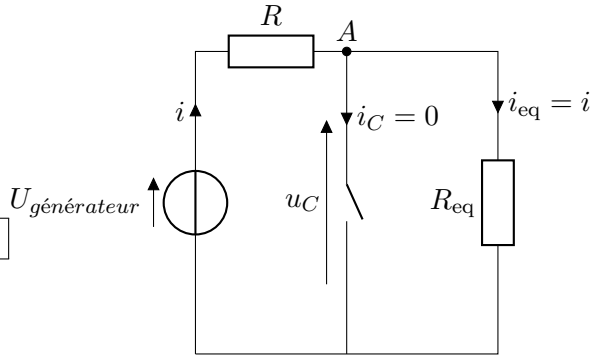

13. (2 points) En associant les résistances $R_1$ et $R_2$ qui sont en série en $R_{12} = R_1 + R_2$, on reconnait un pont diviseur de courant d'où

$$i_{12} = \frac{R_3}{R_{12}+R_3} i_R = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} i_R \qquad \text{et} \qquad i_3 = \frac{R_{12}}{R_12+R_3} i_R = \frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3} i_R.$$

14. (3 points) Après avoir associé en série $R_1$ et $R_2$, on peut associer $R_{12}$ et $R_3$ en parallèle de sorte que

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12}+R_3} = \frac{(R_1+R_2)\,R_3}{R_1+R_2+R_3}.}$$

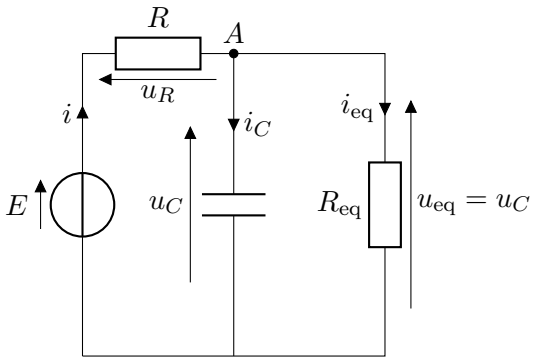
15. (5 points) En régime permanent le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, on obtient alors le circuit équivalent ci-contre. On en déduit que




$$\boxed{i = \frac{E}{R+R_{\text{eq}}} = i_R}, \boxed{u_C = R_{\text{eq}} i = \frac{R_{\text{eq}}}{R+R_{\text{eq}}} E} \qquad \text{et} \qquad \boxed{i_C = 0.}$$

16. (4 points) D'après la loi des noeuds en $A$

$$\begin{aligned} i &= i_{\text{eq}} + i_C \\ &= \frac{u_C}{R_{\text{eq}}} + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$




Par ailleurs, d'après la loi des mailles :

$$\begin{aligned} E &= u_R + u_C \\ &= Ri + u_C \\ \text{d'où} \qquad i &= \frac{E-u_C}{R}. \end{aligned}$$

En combinant les deux expressions, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{E-u_C}{R} &= \frac{u_C}{R_{\text{eq}}} + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \frac{E}{R} &= \left(\frac{1}{R_{\text{eq}}} + \frac{1}{R}\right) u_C + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

$$\text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{R+R_{\text{eq}}}{RR_{\text{eq}}C} u_C = \frac{E}{RC}.$$

17. (2 points) Posons $\tau = \frac{RR_{\text{eq}}C}{R+R_{\text{eq}}}$ et $A = \frac{ER_{\text{eq}}}{(R+R_{\text{eq}})}$ alors l'équation différentielle s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{ER}{(R+R_{\text{eq}})\,\tau} \overset{def}{=} \frac{A}{\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{RR_{\text{eq}}C}{R+R_{\text{eq}}}.}$$

18. (1 point) Le condensateur étant initialement déchargé et la tension à ses bornes étant une fonction continue, on en déduit que $\boxed{u_C(t=0^-) = u_C(t=0^+) = 0.}$

19. (4 points) La solution générale s'écrit

$$u_C(t) = u_{CH}(t) + u_{Cp} = K\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{Cp}.$$

Déterminons l'expression de la solution particulière $u_{Cp}$ cherchée sous la forme d'une constante :

$$\cancel{\frac{\mathrm{d}u_{Cp}}{\mathrm{d}t}} + \frac{u_{Cp}}{\tau} = \frac{A}{\tau} \qquad \text{donc} \qquad u_{Cp} = A = \frac{ER_{\text{eq}}}{R+R_{\text{eq}}}.$$

La solution générale s'écrit alors

$$u_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau} + A \qquad \text{avec} \qquad K \text{ une constante à déterminer à l'aide des CI.}$$

Puisque $u_C(t=0) = 0$, on en déduit

$$u_C(t=0) \overset{CI}{=} 0 = K + A \qquad \text{soit} \qquad K = -A.$$

Finalement, la solution générale s'écrit

$$\boxed{u_C(t) = \frac{ER_{\text{eq}}}{R+R_{\text{eq}}}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$$

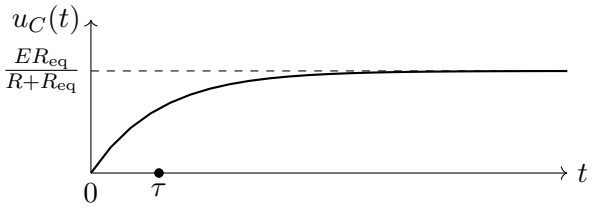
20. (2 points) D'après la relation constitutive du condensateur,

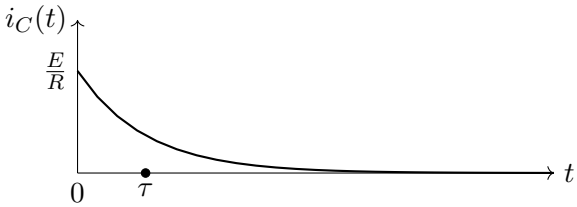
$$\boxed{i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{ER_{\text{eq}}C}{R+R_{\text{eq}}} \times \frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$$

Par ailleurs,

$$\boxed{q(t) = Cu_C = \frac{ER_{\text{eq}}C}{R+R_{\text{eq}}}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$$

21. (3 points)




22. (3 points) Multiplions la loi des mailles par l'intensité $i$ :

$$Ei = u_R i + u_C i \qquad \text{or} \qquad i = i_C + i_{\text{eq}}$$
$$Ei = Ri^2 + u_C i_C + u_C i_{\text{eq}}$$

$$\underbrace{Ei}_{\substack{\text{Puissance fournie}\\ \text{par le générateur}}} = \underbrace{Ri^2 + R_{\text{eq}}i_{\text{eq}}^2}_{\substack{\text{Puissance reçue}\\ \text{par les résistances}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}_{\substack{\text{Puissance reçue}\\ \text{par le condensateur}}}$$

23. (Bonus) Kimi Antonelli.

FIN