TD 7 : Oscillateurs en régime sinusoidal forcé

À préparer : Exercices 1, 2, 4, (6)

Compétences	Capacités
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en notation complexe.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la réprésentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

Exercice 1 : Calculs fondamentaux du chapitre ♢

1. Quelle est l'expression générale en régime sinusoïdal forcé de la solution de

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z(t) = \omega_0^2 Z_{Am}\cos(\omega t) \quad \text{(E)} \quad ?$$

2. **Donner** la représentation complexe de $s(t) = S_m\cos(\omega t + \varphi)$. Définir l'amplitude complexe $\underline{S_m}$. Comment en déduire l'amplitude S_m et la phase φ ?
3. À partir de l'équation différentielle (E), **établir** l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$ de $\underline{Z}$.
4. **Exprimer** l'amplitude Z_m si l'amplitude complexe est $\underline{Z_m} = \dfrac{Z_{Am}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$, avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.
5. **Justifier** qu'il se produit une résonance en une pulsation ω_r que l'on **exprimera** en fonction de ω_0 et Q, à condition que Q vérifie une certaine condition que l'on **exprimera**.
   Tracer qualitativement l'allure de Z_m en fonction de ω.
6. On donne l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité du circuit RLC série : $\underline{I_m} = \dfrac{E_m/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
   Exprimer son amplitude puis **justifier** l'existence d'une résonance quelque soit la valeur de Q. **Tracer** qualitativement l'allure de $|\underline{I_m}|$ en fonction de ω.
   Que peut-on dire de la phase à la résonance ?

Exercice 2 : Exploitation d'une courbe de résonance ♢

On considère un circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale de la forme $e(t) = Ecos(\omega t)$. On donne $E = 5\,\text{V}$, ainsi que le tracé de l'intensité dans le circuit en fonction de la pulsation $10^4\omega$.

1. Comment peut-on mesurer l'intensité dans le circuit ?
2. Retrouver l'expression de la pulsation propre du système ω_0, puis montrer qu'à la résonance on a $I = \frac{E}{R}$ où I est l'amplitude de l'intensité.
3. En déduire la valeur de la résistance R.
4. Déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0, du facteur de qualité Q, puis de l'inductance L et de la capacité C du circuit.

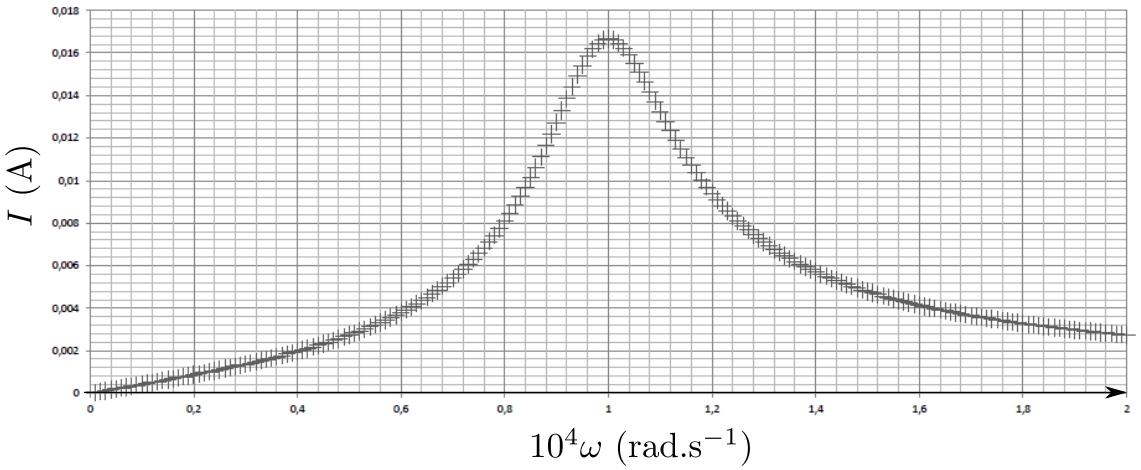


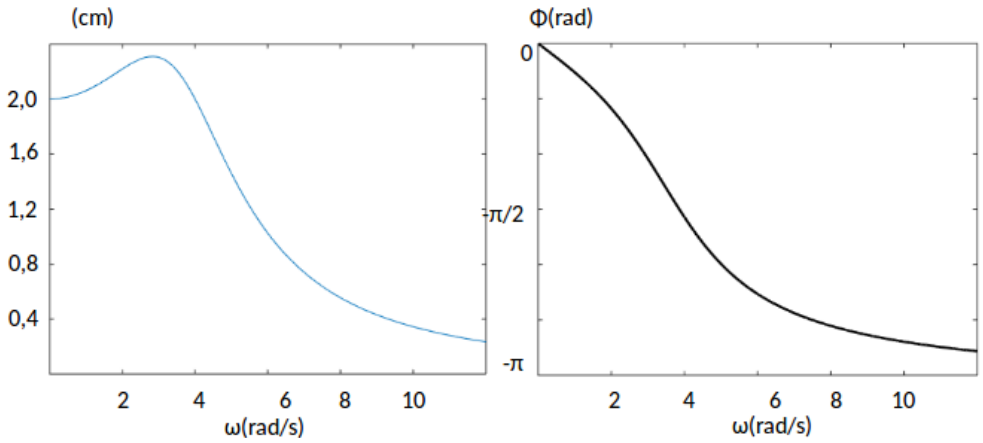
Fig. 1 Courbe de résonance en intensité.

Exercice 3 : Résonance mécanique d'un ressort ♢♢

On considère une masse m fixée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 excité sinusoïdalement à son autre extrémité par une force $\vec{F_{exc}} = F_0 \cos \omega t \vec{u_x}$. Le mouvement est horizontal dans la direction x. La masse est soumise à une force de frottement fluide proportionnelle (coefficient de proportionnalité α) à sa vitesse.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse et en déduire une équation différentielle du second ordre en X, l'écart à la position d'équilibre x_0 (ou élongation du ressort). Introduire une pulsation ω_0 et un facteur de qualité Q que l'on explicitera. Proposer une analogie avec les systèmes électriques étudiés en cours.
2. Grâce au passage en complexes, exprimer $\underline{X}(t)$ en fonction de $\underline{F_{exc}}(t)$.
3. En déduire qu'une résonance de l'amplitude de $\underline{X}(t)$ est possible. À quelle condition ?
4. Exprimer alors la pulsation de résonance ω_r.
5. À quelle résonance « électrique » peut-on comparer cette situation ?
6. Évaluer l'amplitude de l'élongation à la résonance ? Que devient-elle pour les facteurs de qualité élevés ?
7. Exprimer le déphasage ϕ entre l'élongation et la force excitatrice. Le tracer qualitativement.
8. On considère à présent les enregistrements de l'élongation et du déphasage suivants en fonction de la pulsation ω :

Évaluer la pulsation de résonance ω_r, la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité du système à partir des enregistrements.



Exercice 4 : Détermination des paramètres d'un RLC série ♢♢

Un circuit RLC série est alimenté par une source de tension $e(t) = U_{Gm}\cos\omega t$ où U_{Gm} est l'amplitude de la tension fournie par le générateur, cette amplitude restant invariante pendant les mesures réalisées. On note I la mesure de l'intensité affichée sur un ampèremètre lorsque la fréquence f du générateur varie, la courbe obtenue étant tracée sur la figure 34. On précise que le maximum est atteint exactement au point indiqué. Un oscilloscope en bicourbe donne accès au déphasage ϕ entre l'intensité $i(t)$ et la tension $e(t)$ la courbe correspondante étant la figure 35. Enfin, sur la figure 36 est reproduit l'écran d'un oscilloscope en bicourbe, représentant les tensions du générateur $e(t)$ et aux bornes de la résistance $u(t)$.

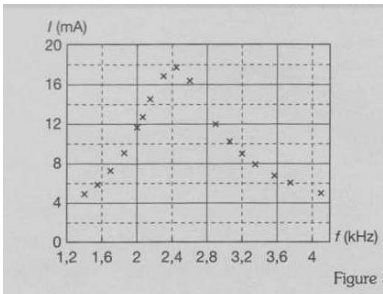
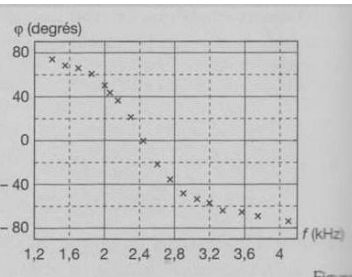


Figure 34



Figure

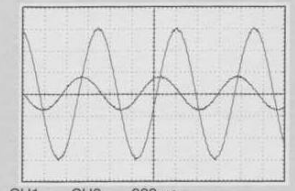


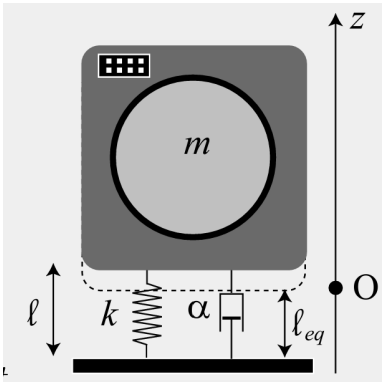
Figure 36

1. **Résultats théoriques**
   (a) Déterminer en notation complexe l'expression du courant $i(t)$ parcourant le circuit en fonction de celle $e(t)$ du générateur.
   (b) Quelle est l'expression de l'amplitude i_0 de $i(t)$ en fonction de la pulsation ? On pourra introduire le facteur de qualité Q et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.
   (c) Exprimer la pulsation de résonance ω_r, les pulsations de coupure ω_{C1} et ω_{C2}, ainsi que la bande passante $\Delta\omega$ en fonction des paramètres du circuit.
   (d) Quelle est l'expression du déphasage ϕ en fonction de la pulsation ? On exprimera $\tan\phi$.
2. **Exploitation des résultats expérimentaux**
   (a) Quel montage a-t-on réalisé afin d'obtenir sur un oscilloscope les courbes de la figure 36 ? Identifier sur cette figure $u(t)$ et $e(t)$. Retrouver l'un des points de la figure 35 en sachant que : $\phi/2\pi = \Delta t/T$.
   (b) Que vaut numériquement la pulsation de résonance ω_r ?
   (c) Qu'appelle t-on valeur efficace de l'intensité ? Sachant que I est la valeur efficace de l'intensité, en déduire l'amplitude i_0 du signal.
   (d) Comment obtenir le plus simplement possible la valeur de la résistance R ? Faire l'application numérique.
   (e) Évaluer de deux manières différentes les pulsations de coupure, ainsi que la bande passante.
   (f) Que dire du produit $\omega_{C1} \times \omega_{C2}$? Évaluer le facteur de qualité Q.
   (g) Déduire de ce qui précède la valeur de l'inductance L.
   (h) Que vaut la capacité C ?
   (i) Commenter ces résultats.

Exercice 5 : Lave-linge ♢♢

Lorsqu'un lave-linge fonctionne, un balourd provoqué par le linge en rotation provoque des vibrations du châssis et il est nécessaire de prévoir un système de suspension du tambour. On assimile le tabour lesté à un point matériel de masse m relié à une suspension modélisée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide $\overrightarrow{f_v} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Le balourd provoque l'apparition d'une force supplémentaire sinusoïdale de la forme $\overrightarrow{f_e} = A_0\omega^2\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$ où ω est la pulsation (vitesse angulaire) du moteur.





Mécanique - Licence/CPGE, Dunod

1. Dans un premier temps, on suppose le moteur à l'arrêt. **Exprimer** la longueur du ressort ℓ_{eq} à l'équilibre en fonction de ℓ_0, k, m et g.
2. On pose $z(t) = \ell - \ell_{\text{eq}}$. **Montrer** que le mouvement de la masse m est régie par l'équation différentielle

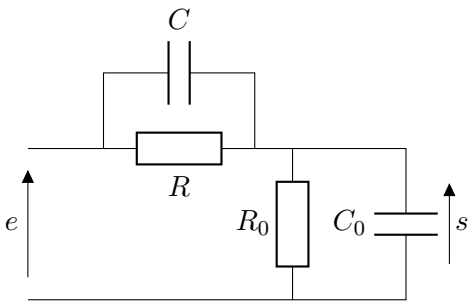
$$\ddot{z} + 2\Gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = A\omega^2\cos(\omega t)$$

   où l'on précisera les expressions de A, ω_0 et Γ. Calculer ω_0 et Γ.
3. On étudie dans la suite le régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω.
   Exprimer l'amplitude Z_m des oscillations du mobile.
4. **Tracer** qualitativement $Z_m(\omega)$.
5. Le tambour tourne à $\omega = 1{,}0 \times 10^3\,\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$.
   Calculer $Z_m(\omega)$ et $Z_{\max} = Z_m(\omega_0)$. Vérifiez que le système est bien dimensionné pour éviter des déplacements trop importants.

Données : $m = 10\,\text{kg}$; $k = 9 \times 10^3\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $\alpha = 1 \times 10^2\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$; $A = 2 \times 10^{-2}\,\text{m}$

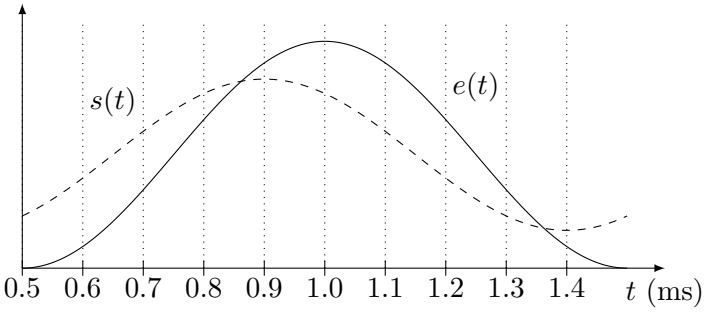
Exercice 6 : Modélisation de l'entrée d'un oscilloscope ♢♢

Pour mesurer de fortes tensions au laboratoire (centaines de volts) on utilise une sonde branchée à un oscilloscope. Elle est principalement constituée d'un condensateur de capacité C en parallèle d'un résistor de résistance R. La résistance R_0 et le condensateur C_0 en parallèle modélisent l'entrée « usuelle » de l'oscilloscope. On alimente l'entrée avec une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. On a $R_0 = 1{,}0\,\text{M}\Omega$, $R = 9{,}0\,\text{M}\Omega$ et $C_0 = 30\,\text{pF}$.



1. Exprimer $\underline{s}$ en fonction de $\underline{e}$. Introduire deux constantes de temps τ_1 et τ_2.
2. En déduire la condition pour que les amplitudes $e(t)$ et $s(t)$ soient indépendantes de la fréquence.
3. Déterminer la capacité C à utiliser.
4. Que vaut alors le rapport des amplitudes de ces tensions ? Tracer $e(t)$ et $s(t)$ sur un même graphe dans ce cas.

Lors de l'utilisation, le condensateur de la sonde se détériore et sa capacité change. On mesure les deux signaux $e(t)$ et $s(t)$. Ils sont représentés ci-contre.

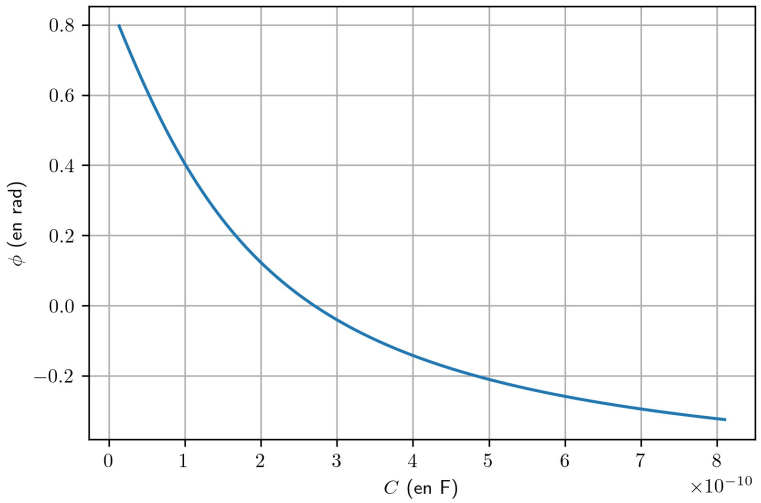


5. À partir d'une mesure du déphasage, on cherche à déterminer la valeur de la capacité du condensateur endommagé. Une résolution analytique est possible mais assez fastidieuse, aussi, nous suivrons une méthode numérique.

   (a) Déterminer graphiquement la valeur du déphasage ϕ.

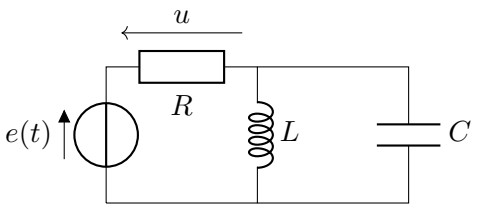
   (b) Comment peut-on déterminer analytiquement le déphasage ϕ ?

   (c) On donne ci-contre l'évolution de ce déphasage ϕ en fonction de la valeur de la capacité C. En déduire la valeur de la capacité C' du condensateur endommagé.



Exercice 7 : Circuit bouchon ♢♢♢

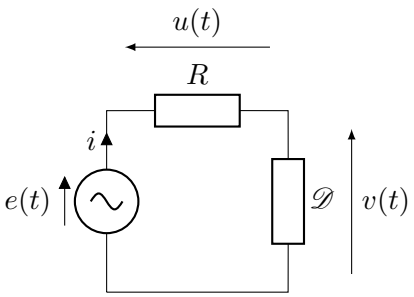
On considère le circuit ci-contre avec $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
On étudie la tension aux bornes de la résistance en régime sinusoïdal forcé : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

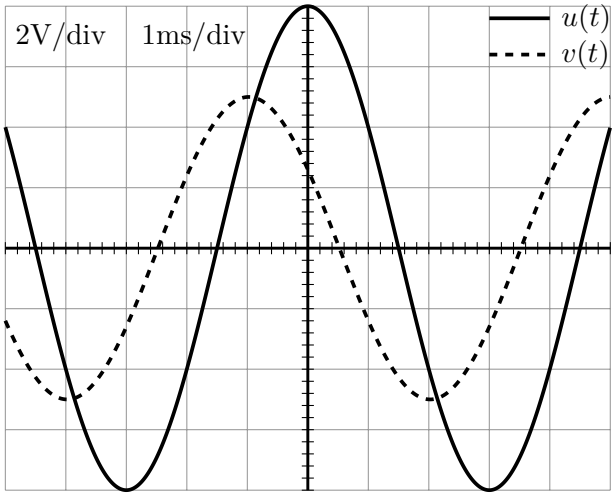


1. **Établir** l'expression de $\underline{u}$.
   On **introduira** la pulsation caractéristique et le facteur de qualité.
   En déduire l'amplitude complexe $\underline{U_0}$ en fonction de $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.
2. **Étudier** et **tracer** le module de U_0 en fonction de x. **Montrer** qu'il existe une anti-résonance (pulsation pour laquelle l'amplitude U_0 est minimale).

Exercice 8 : Nature d'un dipôle inconnu ♢♢♢

Dans le montage ci-dessous, le GBF délivre une tension sinusoïdale $e(t)$ de fréquence f. R est une résistance connue ($R = 100\,\Omega$) et $\mathscr{D}$ un dipôle inconnu. On visualise à l'oscilloscope $v(t)$ et $u(t)$ avec des calibres identiques sur les deux voies.





1. Sachant que le GBF et l'oscilloscope utilisés sont tous les deux munis de prises de terre, quel problème expérimental devra-t-on résoudre pour visualiser simultanément $v(t)$ et $u(t)$?
2. On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance du dipôle $\mathscr{D}$.
   Déterminer à partir de la courbe les valeurs de X et de Y.
3. Par quel dipôle peut-on modéliser $\mathscr{D}$? Donner ses caractéristiques.