Chapitre 7

Oscillateurs en régime sinusoidal forcé

Sommaire

I . Régime sinusoidal forcé 1
1 . Exemple en électrocinétique 1
2 . Principe de la résolution : régime transitoire et régime sinusoidal forcé 1
3 . Représentation complexe pour une grandeur sinusoidale 2
II . Circuits électriques en régime sinusoidal forcé 4
1 . Impédances et admittances complexes 4
2 . Utilisation des impédances et admittances 6
3 . Étude d'un circuit linéaire en RSF 7
III . Oscillateurs électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoidale : résonance 8
1 . Résonance en intensité dans un circuit RLC série 8
2 . Résonance en élongation pour un oscillateur mécanique 11
3 . Résonance en tension dans un circuit RLC série 13
4 . Analogie résonance en élongation / en tension 14
5 . Exploitation graphique 14

I. Régime sinusoidal forcé

Dans la partie précédente ont été étudiés les régimes libres (transitoires) des oscillateurs. Pour cela, après avoir excité un système oscillant, on l'a laissé évoluer librement. Nous allons désormais nous intéresser à des oscillateurs soumis continuellement à une excitation sinusoïdale : c'est le **régime sinusoïdal forcé**.

Notations On appellera j (et non i pour ne pas confondre avec l'intensité) l'unité de l'axe imaginaire. en minuscules : $u(t)$ et $i(t)$ désignent des grandeurs dépendantes du temps. en majuscules : U et I sont des grandeurs continues (constantes).

I.1. Exemple en électrocinétique

Soit le circuit RLC ci-contre : il est soumis à une tension excitatrice extérieure (GBF) $e(t) = E_0 \cos \omega t$.
Déterminons l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$.

$$LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = E_0 \cos \omega t \qquad (1)$$

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_0 \cos \omega t \qquad (2)$$

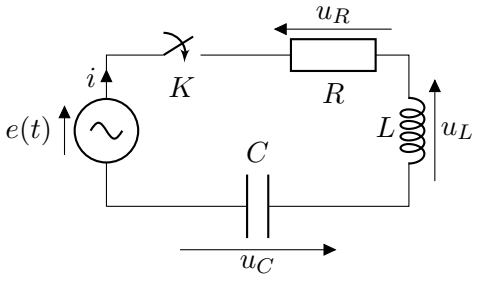


Fig. 1 Schéma du circuit.

I.2. Principe de la résolution : régime transitoire et régime sinusoidal forcé

La solution complète regroupe :

— Une famille de solutions vérifiant l'équation différentielle sans second membre :
L'équation est alors identique à celle rencontrée pour étudier la réponse d'un circuit RLC (trois régimes de variation possibles...) Quel que soit le cas de figure, ces solutions, notées $u_{CH}(t)$, s'atténuent avec le temps :

elles comportent une exponentielle décroissante et sont paramétrées par deux constantes d'intégration. Elles traduisent un **régime transitoire** qui correspond au régime libre.

— Une solution particulière de l'équation complète de même forme que le second membre :
Ici elle est donc stable dans le temps : c'est une fonction sinusoïdale de **pulsation ω celle imposée par le GBF** du circuit. Elle se met donc sous la forme suivante :

$$u_C(t) = U_{cm}\cos(\omega t + \phi)$$

où U_{cm} et ϕ sont des constantes à déterminer.

— La solution complète se met donc sous la forme :

Les solutions de l'équation sans second membre s'atténuent au cours d'un régime transitoire à l'issue duquel s'établit **une solution sinusoïdale stable qui constitue le régime permanent**.

Par conséquent nous n'étudierons que le régime permanent, en effet la durée du régime transitoire est le plus souvent négligeable. Pour un régime transitoire pseudo-périodique, l'établissement de la solution particulière présente l'aspect suivant :

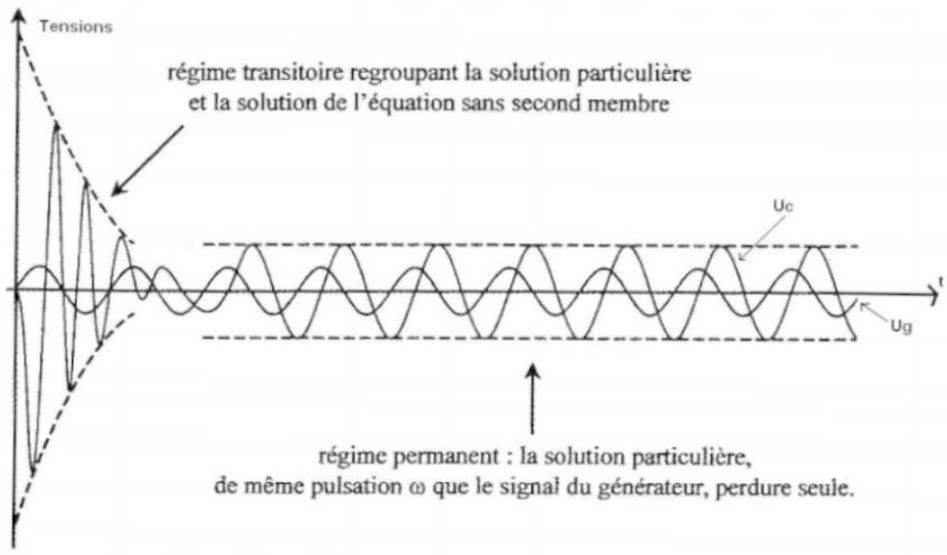


Fig. 2 Évolution de la solution particulière en fonction du temps.

D'après le graphe, $u_{C1} = 0$, donc $u_C(t) = U_{cm}\cos(\omega t + \phi)$.
Il faut donc déterminer les constantes U_{cm} et ϕ : amplitude et phase à l'origine du signal. Pour cela, on peut réintroduire cette solution particulière dans l'équation :

La résolution semble très délicate : Utilisons donc les **notations complexes** ! L'objectif est de **déterminer les expressions de $U_{cm}(\omega)$ et de $\phi(\omega)$.**

I.3. Représentation complexe pour une grandeur sinusoidale

I.3.a. Définition

Si un circuit est soumis à une fem (ou un cem) sinusoïdale, alors toutes les tensions (ou intensités) du circuit sont **sinusoïdales de même pulsation ω que celle imposée par le générateur puisque le système est linéaire (pas d'enrichissement spectral).**

À retenir **Notation complexe**

À toute grandeur sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$ est associée une fonction **complexe**

$$\underline{u}(\omega) = U_m e^{j(\omega t+\phi)} = \underline{U_m} e^{j\omega t}$$

telle que

$$u(t) = \Re(u(\omega)) \qquad \text{et} \qquad U_m = |\underline{U_m}| \qquad \text{et} \qquad \phi = \arg(\underline{U_m}).$$

et où $\underline{U_m}$ est appelée **amplitude complexe** et ϕ **phase à l'origine**.

$$\underline{u}(\omega) = \underbrace{U_m \cos(\omega t + \phi)}_{u(t)} + \underbrace{jU_m \sin(\omega t + \phi)}_{\text{pas de sens physique}}$$

Objectifs de l'étude L'étude consiste à déterminer $U_m(\omega)$ et $\phi(\omega)$. Pour ce faire, le module $|\underline{U_m}| = U_m$ de l'amplitude complexe $\underline{U_m}$ et son argument $\arg(\underline{U_m}) = \phi$ doivent être exprimés : ce sera l'objectif de tout exercice en régime sinusoidal forcé.

Rappel mathématiques

Soient $\underline{z} = a + jb$ et $\underline{w} \in \mathbf{C}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ et j tel que $j^2 = -1$:

- $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- $\left|\dfrac{\underline{z}}{\underline{w}}\right| = \dfrac{|\underline{z}|}{|\underline{w}|}$,
- Si $a > 0$, alors $\arg \underline{z} = \arctan \dfrac{b}{a}$,
- $\arg \dfrac{\underline{z}}{\underline{w}} = \arg \underline{z} - \arg \underline{w}$.

Application 1 : Représentation complexe de signaux sinusoïdaux

E, ω, τ, ω_0, Q sont des réels positifs.

1. Donner le signal complexe associé aux signaux suivants et identifier l'amplitude complexe.

   (a) $e(t) = E\cos(\omega t + \pi/3)$ (b) $i(t) = I_m\sqrt{2}\cos(\omega t)$

2. Donner le module des complexes ci-dessous.

   (a) $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1 + j\omega\tau}$ (b) $\underline{u} = \dfrac{Ej\omega\tau}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t}$ (c) $\underline{U_m} = \dfrac{-E\omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$

3. Comment exprime-t-on l'argument d'un nombre complexe $\underline{z} = a + ib$, si $a > 0$? si $a < 0$ et $b > 0$? si $a < 0$ et $b < 0$?

4. Déterminer l'expression de l'argument de $\underline{U_m}$.

   (a) $\underline{U_m} = \dfrac{Ej\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$ (b) $\underline{U_m} = \dfrac{E}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ (c) $\underline{U_m} = \dfrac{E\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{j\omega\omega_0}{Q}}$

I.3.b. Opérations

Dérivons $\underline{u}(\omega)$ par rapport au temps :

À retenir

Ainsi, **dériver** par rapport au temps une fonction sinusoïdale, revient à **multiplier la fonction complexe par** $j\omega$.

Dérivée première	Dérivée seconde	Intégration
$\frac{\mathrm{d}\underline{u}(\omega)}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{u}$	$\frac{\mathrm{d}^2\underline{u}(\omega)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\underline{u}$	$\int \underline{u}(\omega)\mathrm{d}t = \frac{\underline{u}}{j\omega}$

Avec cette notation complexe, l'équation différentielle pour le RLC série (Éq 2) devient

$\Rightarrow$ **On passe d'une équation différentielle à une équation algébrique sur le corps des complexes.**

Ces notations peuvent être appliquées à toutes les relations linéaires qui interviennent en électricité : lois de Kirchhoff, ponts diviseur, Millmann,...etc

II. Circuits électriques en régime sinusoidal forcé

En régime sinusoidal forcé, la notation complexe est privilégiée pour l'étude d'un circuit électrique. Il faut pour ce faire, introduire un certain nombre de notions.

II.1. Impédances et admittances complexes

II.1.a. Cas d'un dipôle quelconque

Impédance complexe

En régime sinusoïdal un dipôle linéaire est décrit par une relation courant tension à ses bornes telle que :

$$\underline{u} = \underline{Z}\underline{i} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}.}$$

où $\underline{Z}$ est appelé **impédance complexe**.

Posons $u(t) = U_m\cos(\omega t + \phi_u)$ et $i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi_i)$ aux bornes du dipôle. En complexe, on a donc

soit au final

avec

— le **module de $\underline{Z}$: impédance réelle**

$$|\underline{Z}| \equiv Z = \frac{U_m}{I_m}$$

— l'**argument de $\underline{Z}$: déphasage ϕ de u par rapport à i**

$$\phi = \phi_u - \phi_i$$

— partie réelle et imaginaire :

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m}\cos(\phi_u - \phi_i) + j\frac{U_m}{I_m}\cos(\phi_u - \phi_i) \equiv R + jX$$

avec

R : **résistance du dipôle** $R = \frac{U_m}{I_m}\cos(\phi_u - \phi_i) = Z\cos\phi$
X : **réactance du dipôle** $X = \frac{U_m}{I_m}\cos(\phi_u - \phi_i) \equiv Z\sin\phi$

On définit l'**admittance** $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance $\underline{Z}$:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I_m}}{\underline{U_m}}.$$

L'admittance réelle $|\underline{Y}| = \frac{1}{Z}$ s'exprime en siemiens (S). L'argument de $\underline{Y}$ correspond au déphasage de i par rapport à u.

Remarque

On peut écrire $\underline{Y} = G + jB$ avec G la conductance et B la susceptance.

II.1.b. Cas d'un résistor

La loi d'Ohm indique que $u(t) = Ri(t)$ donc $\underline{u} = R\underline{i}$ d'où

L'impédance d'une résistance est donc $\boxed{\underline{Z} = R}$. Elle est donc réelle et indépendante de ϕ. Autrement dit : $\phi = 0$ donc u et i sont en phase.

II.1.c. Cas d'une bobine

Pour une bobine la relation connue donne en notation complexe

Par identification,

car $j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$.

L'impédance d'une bobine est donc $\boxed{\underline{Z} = Lj\omega = Ze^{j\frac{\pi}{2}}}$. Elle dépend de la pulsation ω. $\phi = \phi_u - \phi_i = \frac{\pi}{2}$ donc u est en avance sur i.

II.1.d. Cas d'un condensateur

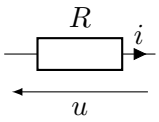
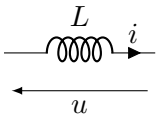
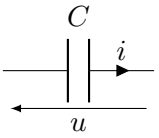
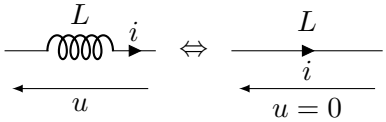
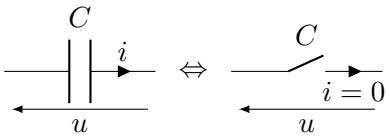
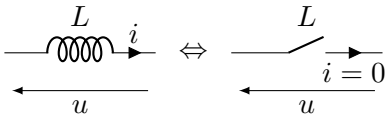
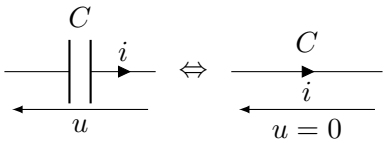
Pour un condensateur la relation connue donne en notation complexe

Ainsi,

L'impédance d'un condensateur est donc $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{1}{Cj\omega}}$. Elle dépend de ω.

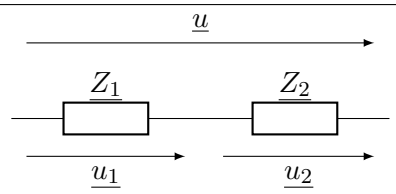
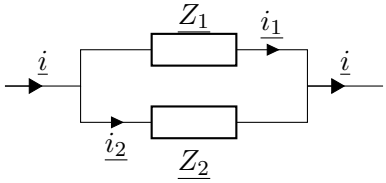
$\phi = \phi_u - \phi_i = -\frac{\pi}{2}$rad donc u est en retard sur i.

À retenir

Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Schéma			
Impédance complexe	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_L} = Lj\omega$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{Cj\omega}$
$\omega \longrightarrow 0$	$Z_R \to R$	$Z_L \to 0$ 	$Z_C \to \infty$ 
$\omega \longrightarrow \infty$	$Z_R \to R$	$Z_L \to \infty$ 	$Z_C \to 0$ 

II.2. Utilisation des impédances et admittances

À retenir

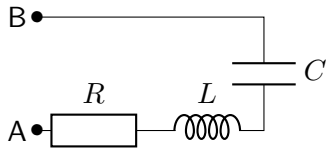
	Série	Dérivation
Schéma		
Expression de $\underline{Z_{éq}}$	$\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$	$\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} \Leftrightarrow \underline{Z_{éq}} = \frac{\underline{Z_1}\,\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$
Pont diviseur	de tension : $\underline{u_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{u}$	de courant : $\underline{i_1} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{i}$

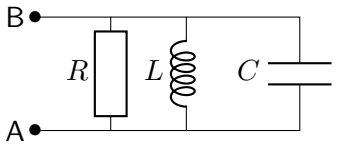
Remarque

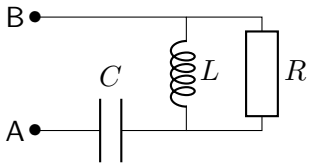
Ces lois peuvent être généralisées à N impédances.

Application 2 : Impédances équivalentes

Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}}$ équivalente au dipôle AB. On notera ω la pulsation des grandeurs électriques.

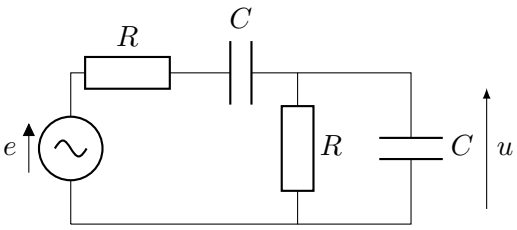
1. 

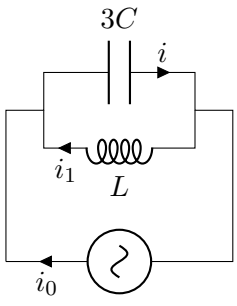
2. 

3. 

Application 3 : Ponts diviseurs

Établir les expressions, en utilisant la représentation complexe, de $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$ ou de $\underline{i}$ et $\underline{i_1}$ en fonction de $\underline{i_0}$ pour les circuits ci-dessous.

1. 

2. 

II.3. Étude d'un circuit linéaire en RSF

Méthode *Comment étudier un circuit linéaire en RSF ?*

Dans le cadre du régime sinusoïdal forcé, la représentation complexe peut (et doit !) être utilisée.

1. Écrire l'impédance de chaque dipôle linéaire passif présent dans le circuit.
2. Introduire sur le schéma du circuit, toutes les tensions et intensités nécessaires : positionner les flèches et les nommer.
3. Associer les impédances entre elles dès que possible (en série ou en parallèle), *qui ne font pas disparaître les grandeurs électriques recherchées.*
4. Écrire les lois des mailles et/ou lois des nœuds nécessaires **en représentation complexe**.
5. Ne pas oublier les PONTS DIVISEURS de tension et de courant **en représentation complexe**, bien

utiles, qui remplacent des lois des mailles/des nœuds.

III. Oscillateurs électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoidale : résonance

III.1. Résonance en intensité dans un circuit RLC série

On rappelle qu'on s'intéresse au circuit présenté en Fig. 1 et rappelé ci-dessous.

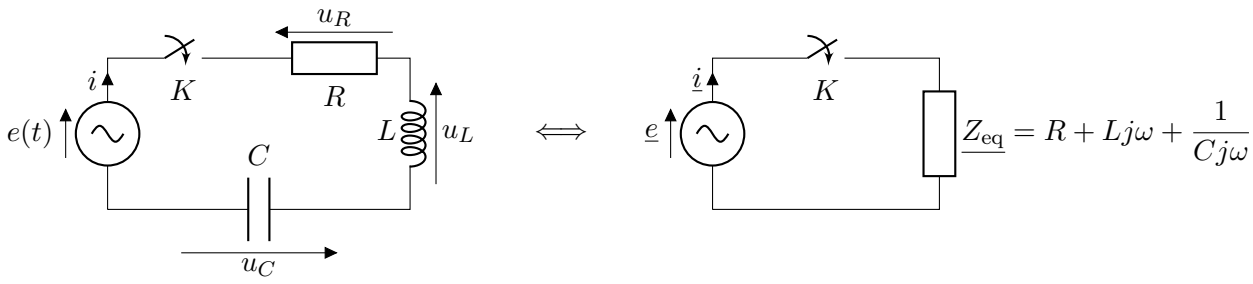


Fig. 3 Gauche : Schéma du circuit considéré. Droite : Circuit équivalent.

III.1.a. Détermination de l'amplitude complexe

Soit $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$, l'intensité traversant le circuit série, et $e(t) = E\cos\omega t$ la tension délivrée par le générateur GBF. On choisit la tension du générateur comme origine des phases *i.e.* $\phi_e = 0°$.

En notation complexe, on a donc

Par ailleurs, on peut associer en série le résistor, la bobine et le condensateur tel que

Rappel

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j} \times \frac{1}{j} = -j$$

Soit

Posons

On obtient alors

$$\underline{I_m} = \frac{\underline{E}/R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)},$$

soit en posant $\boxed{x = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$ la **pulsation réduite** (sans dimension)

$$\boxed{\underline{I_m} = I_m \mathrm{e}^{j\phi} = \frac{\underline{E}/R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.}$$

III.1.b. Étude de l'amplitude

Comme $\underline{I_m} = I_m \mathrm{e}^{j\phi}$, par définition $I_m = |I_m|$ soit

$$I_m = |I_m| = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Caractérisation de la fonction

- À BF, $x = \frac{\omega}{\omega_0} \to 0$, $I_m \to 0$, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : le courant est nul ;
- À HF, $x = \frac{\omega}{\omega_0} \to \infty$, $I_m \to 0$, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert : le courant est nul ;
- Le maximum est obtenu pour $x = 1$ (minimise le dénominateur). Ainsi l'intensité est maximale pour une pulsation de résonance égale à la pulsation propre ω_0 : on dit qu'il y a **résonance d'intensité**.

Plus généralement, une résonance intervient quant un système physique répond de manière maximale à une excitation.

À la résonance, $I = I_{m,max} = \frac{E}{R}$: tout se passe comme si l'inductance et le condensateur étaient absents.

III.1.c. Bande passante

On s'intéresse au domaine de fréquence dans lequel l'amplitude de l'intensité reste importante, c'est à dire assez proche de son maximum.

Bande passante

Gamme de fréquences pour lesquelles l'amplitude reste supérieure à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$.

On définit alors les pulsations de coupure ω_{C1} et ω_{C2} (ou x_{C1} et x_{C2}) par :

$$I_m(\omega_C) = \frac{I_{m,max}}{\sqrt{2}} = \frac{E}{R\sqrt{2}} \qquad \text{soit} \qquad I_m(x_C) = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x_C - \frac{1}{x_C}\right)^2}} = \frac{E}{R\sqrt{2}}$$

ce qui revient à résoudre :

Le discriminant est $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$ donc il y a deux équations soit quatre racines qui peuvent se mettre sous la forme :

Comme on cherche des pulsations, on ne garde que les valeurs positives d'où

Ainsi, la largeur de la bande passante est donc

$$\Delta x_C = |x_{C2} - x_{C1}| = \frac{1}{Q} \qquad \text{ou} \qquad \Delta\omega_C = \omega_{C2} - \omega_{C1} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}.$$

À retenir ♥ **Largeur de bande passante et facteur de qualité**

La largeur de la bande passante est reliée au facteur de qualité par :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

La bande passante est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est élevé et la résonance aigüe.

Ce résultat renseigne très clairement sur le sens physique de Q : un oscillateur de facteur de qualité élevé ne réagit notablement qu'à des excitations de fréquences très proches de la fréquence de résonance.

III.1.d. Étude de la phase

D'autres informations peuvent être données par la différence de phase entre intensité et tension du générateur. On a

$$\underline{I_m} = I_m \mathrm{e}^{j\phi} = \frac{\underline{E}/R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

Rappel
Si $\underline{X} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$ alors $\arg \underline{X} = \arg \underline{N} - \arg \underline{D}$ et $\tan \arg \underline{X} = \frac{\Im \underline{X}}{\Re \underline{X}}$.

Étudions ici l'argument de l'amplitude complexe $\underline{I_m}$.

Étude de la fonction

- À BF, quand $x = \frac{\omega}{\omega_0} \to 0$, $\tan\phi \to +\infty$ soit $\phi \to +\frac{\pi}{2}$,
- À HF, quand $x = \frac{\omega}{\omega_0} \to \infty$, $\tan\phi \to -\infty$ soit $\phi \to -\frac{\pi}{2}$,
- Pour $x = 1$, $\tan\phi = 0$ et $\phi = 0$: l'intensité i et la tension u sont en phase à la résonance.

Pour un facteur de qualité élevé, la phase varie très rapidement au voisinage de ω_0 et ces variations restent très localisées autour de ω_0.
En revanche pour un facteur de qualité faible, les variations sont plus lentes et réparties sur un domaine de pulsation étendu.

On a vu que les pulsations vérifiaient $Q\left(x_C - \frac{1}{x_C}\right) = \pm 1$ donc

$$\phi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \pm\frac{\pi}{4}\text{rad}.$$

Les pulsations de coupure sont celles pour lesquelles l'intensité et la tension du GBF sont déphasées de $\pm\frac{\pi}{4}$rad.

III.1.e. Exploitation graphique

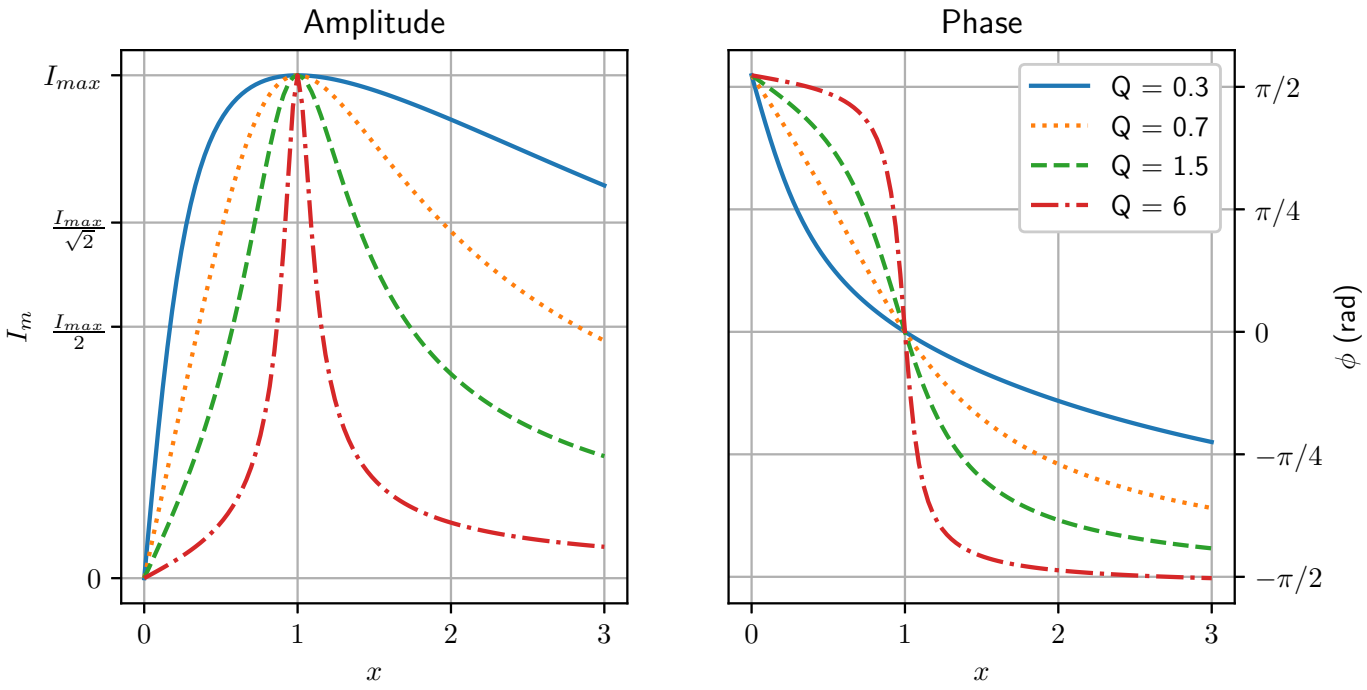


Fig. 4 Résonance en intensité pour un RLC série.

III.2. Résonance en élongation pour un oscillateur mécanique

Considérons un oscillateur mécanique amorti comme celui vu au *Chapitre 6 : Oscillateurs amortis*. On excite sinusoidalement la masselote. L'amplitude des oscillations ainsi que le déphasage entre l'excitation et la réponse sont mesurés et reportés en Fig. 5. On retrouve des graphes similaires mais distincts de ceux obtenus pour la résonance en intensité du circuit RLC. En revanche la résonance en élongation est identique à la résonance en tension pour un circuit RLC.

III.2.a. Amplitude complexe

L'oscillateur mécanique se comporte donc similairement à l'oscillateur électrique. Cette fois-ci, le terme supplémentaire est dû à l'action d'une force $\vec{F_e} = F_m \cos\omega t \vec{u_x}$ exercée sur la masselote.

L'application du PFD donne alors (après projection sur $\vec{u_x}$) :

où $u(t)$ est l'écart à la position d'équilibre et F_m est l'amplitude de la force excitatrice.

L'équation différentielle s'écrit donc

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$.

En passant aux notations complexes :

L'équation différentielle devient :

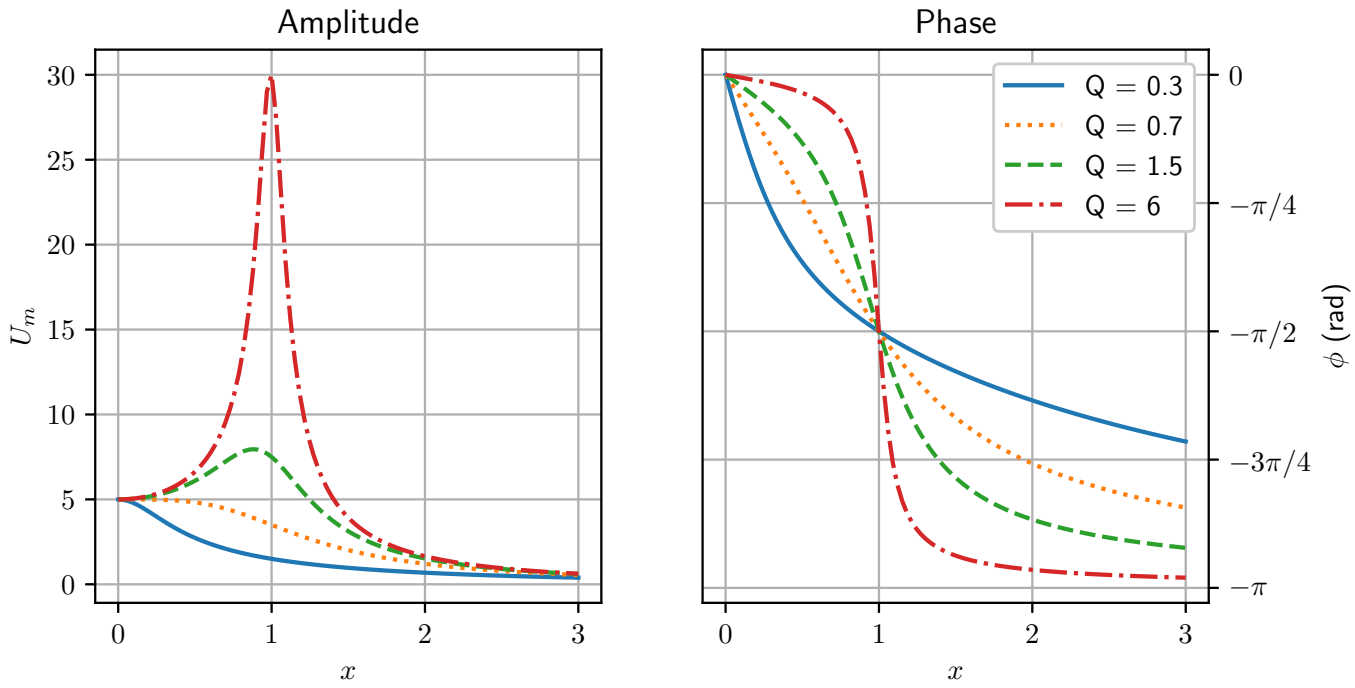


Fig. 5 Amplitude et déphasage mesurés pour un oscillateur mécanique amorti.

On en déduit l'amplitude complexe

$$\underline{U_m} \equiv U_m \mathrm{e}^{j\phi} = \frac{F_m/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_m}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

III.2.b. Résonance d'élongation

Intéressons-nous au module

Recherche des limites

— À BF, quand $x = \frac{\omega}{\omega_0} \to 0$, $U_m \to \frac{F_m}{m\omega_0^2}$,

— À HF, quand $x = \frac{\omega}{\omega_0} \to \infty$, $U_m \to 0$.

Recherche du maximum Soit $f(x) = \left(1 - x^2\right)^2 + x^2/Q^2$. Dérivons :

Il y a deux solutions à savoir

où la deuxième solution n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2} \simeq 0.7$, soit pour un facteur de qualité suffisament élevé. Donc

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

La résonance d'élongation n'existe que pour les oscillateurs mécaniques de facteur de qualité suffisamment élevé, contrairement à la résonance d'intensité dont l'existence est systématique.

La pulsation de résonance ω_r est donc différente de la pulsation propre ω_0. Un facteur de qualité élevé se traduit par une acuité de la résonance autour de la pulsation de résonance.

En général, il est préférable d'éviter la résonance d'élongation dans les systèmes physiques : amortisseur de voiture, pont, grande tour soumise au vent...

III.2.c. Étude de la phase

À nouveau, plus le facteur de qualité est élevé et plus la phase varie rapidement autour de la résonance comme visible en Fig. 5.

III.3. Résonance en tension dans un circuit RLC série

Exercice 1 : Résonance en tension

On souhaite déterminer les caractéristiques en RSF de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t) = U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_u)$ dans le circuit RLC série alimenté par un générateur de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

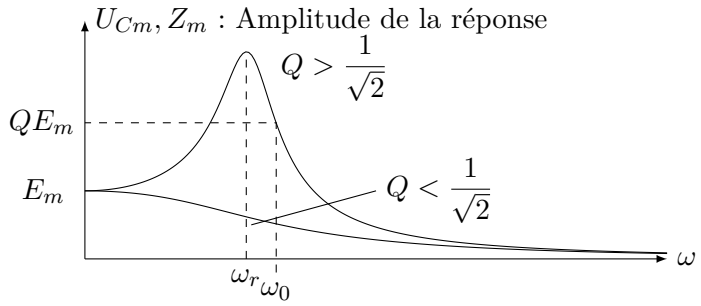
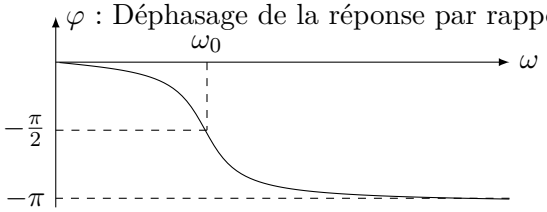
Comportement asymptotique

1. Déterminer le comportement asymptotique de U_{Cm}, sans calculs.

Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

2. Établir l'expression de $\underline{U_{Cm}}$ en fonction de E_m, ω, L, C, R.
   Mettre $\underline{U_{Cm}}$ sous la forme : $\underline{U_{Cm}}(\omega) = \dfrac{E_m}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$, et identifier les expressions de ω_0 et Q.
3. Commenter. Quelle situation reconnaissez-vous ? Que pourra-t-on dire du comportement de la tension aux bornes du condensateur ?

III.4. Analogie résonance en élongation / en tension

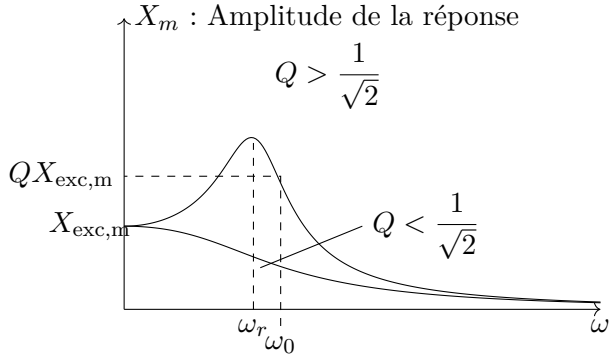
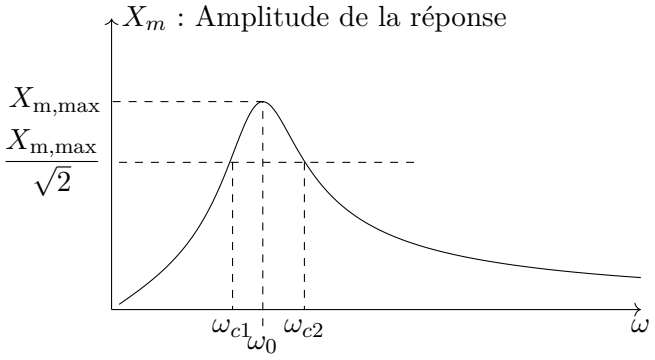
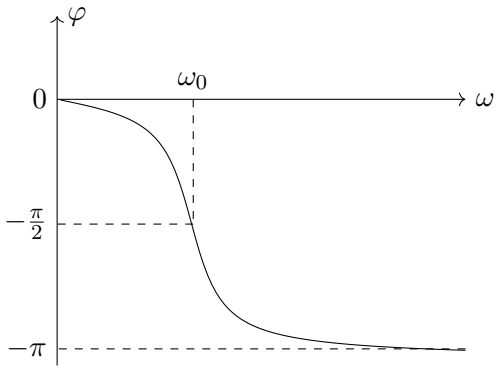
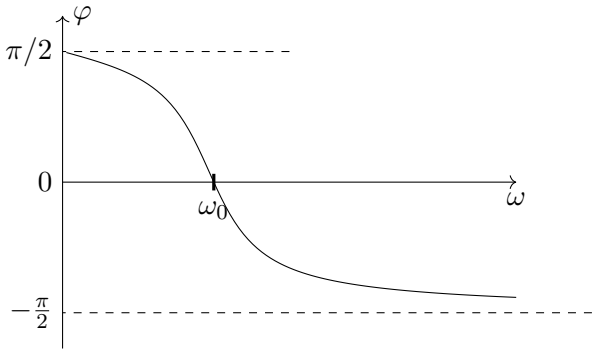
	Résonance en élongation	Circuit RLC série aux bornes de C
Excitation	$u(t) = U_m \cos(\omega t)$	$e(t) = E_m \cos(\omega t)$
Équation différentielle	$m\ddot{u} + \alpha\dot{u} + ku(t) = kF_m(t)$	$L\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}u_c = \frac{1}{C}e(t)$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$	$u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$\underline{U_m}(\omega) = \dfrac{F_m}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$	$\underline{U_{Cm}}(\omega) = \dfrac{E_m}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \dfrac{\sqrt{mk}}{\alpha}$	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
Paramètres de l'oscillateur	α	R
	m	L
	k	$\dfrac{1}{C}$
Graphe de l'amplitude		
Graphe de la phase		

III.5. Exploitation graphique

Méthode *Comment déterminer graphiquement ω_0 et Q ?*

Nous avons rencontré deux types de résonance, de natures très différentes. La lecture graphique de ω_0 et Q est différente dans les deux cas.

On considère un système linéaire excité par une excitation sinusoïdale $x_{\text{exct}}(t) = X_{\text{exc,m}} \cos(\omega t)$ dont on étudie la réponse d'une grandeur physique (tension, intensité, position, vitesse,...) exprimée selon $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Type élongation / tension aux bornes du condensateur dans le RLC série	**Type intensité dans le RLC série**
Expressions	
$\underline{X_m} = \dfrac{X_{\text{exc,m}}}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$	$\underline{X_m} = \dfrac{X_{\text{m,max}}}{1 + jQ\left(u - \dfrac{1}{u}\right)}$
Courbes	
	
	
Pulsation propre ω_0 ?	
ω_0 est l'antécédent de $-\dfrac{\pi}{2}$, à lire sur la courbe de phase	ω_0 est l'antécédent de la phase $\varphi = 0$, à lire sur la courbe de phase ou ω_0 est l'antécédent du maximum de la courbe de X_m.
Facteur de qualité Q ?	
Résonance pour la pulsation : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ Lire ω_r c'est l'antécédent du maximum de X_m. En déduire $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(1 - \left(\dfrac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2\right)}}$	Lire les pulsations de coupure ω_c (les antécédents) telles que $X_m(\omega_c) = \dfrac{X_{\text{m,max}}}{\sqrt{2}}$ $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$ avec $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$

Ouverture :
L'étude de la réponse d'un système en fonction de la fréquence ou pulsation de l'excitation inaugure de nouveaux horizons. En exploitant les propriétés des circuits électriques, il devient possible de sélectionner une partie des signaux entrants : c'est le début du filtrage des signaux, qui fera l'objet du chapitre suivant *Chapitre 8 : Filtrage linéaire.*