chap 5 : Trigonométrie

III) Fonctions circulaires réciproques

- Définition de arctan comme la bijection réciproque de $\tilde{\tan}:]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$
- L'application arctan est continue, croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
- Graphe de arctan.
- Tableaux des valeurs
- Résolution des équations du type : $a\cos x+b\sin x=c$.
- Définition de arcsin comme la bijection réciproque de $\tilde{\sin}:[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$
  Les ensembles de départ de arcsin doivent être naturels et connus.
- ATTENTION : $\arcsin(\sin(x))$ est toujours défini mais vaut x ssi $x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
- Interprétation géométrique.
- Continuité sur $[-1,1]$ et dérivabilité sur $]-1,1[$.
  ATTENTION : Les ensembles pour la continuité et la dérivabilité ne sont pas les mêmes.
- Formule de la dérivée.
- Graphe de la fonction.
- Définition de arccos comme la bijection réciproque de $\tilde{\cos}:[0,\pi]\to[-1,1]$
  Les ensembles de départ de arccos doivent être naturels et connus.
- ATTENTION : $\arccos(\cos(x))$ est toujours défini mais vaut x ssi $x\in[0,\pi]$.
- Interprétation géométrique.
- Continuité sur $[-1,1]$ et dérivabilité sur $]-1,1[$.
  ATTENTION : Les ensembles pour la continuité et la dérivabilité ne sont pas les mêmes.
- Formule de la dérivée.
- Graphe de la fonction.
- Connaître quelques valeurs. Savoir construire le tableau des valeurs tout seul!!!
- Savoir résoudre une équation du type $a\cos(x)+b\sin(x)=c$.

chap 6 : Nombres complexes (deuxième partie)

I) Forme trigonométrique

- Écriture trigonométrique.
- Définition d'un argument.
- Savoir passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproquement.

II) Forme exponentielle

- Définition de $e^{i\theta}$ et $\mathbb{U}$.
- propriétés du $e^{i\theta}$.
- Formules d'Euler et de Moivre.
- Ecriture exponentielle.
- Savoir passer de la forme exponentielle à la forme algébrique et réciproquement.
- $z=re^{i\theta}=z'=r'e^{i\theta'}\iff r=r'$ et $\theta\equiv\theta'\ [2\pi]$.
- Traduction géométrique de $arg(zz')$, $arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$.

III) Résolution d'équation

- Définition des racines n^{ieme} de l'unité.
- Forme des racines n^{ieme} de l'unité.
- Racines n^{ieme} de l'unité.

IV) Angles moitiés

Explication sur un exemple puis explication dans le cas général.

V) Exponentielle complexe

- Définition
- Propriétés de base
- Résolution de $e^z=a$

VI) Les complexes appliqués à la géométrie

- L'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est congru modulo 2π à $arg(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A})$.

- Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité de à l'aide de l'argument précédent.
- MULTIPLIER par $e^{i\theta}$ revient à effectuer une rotation de centre O et d'angle θ.
- Généralisation : Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.
- Application pour trouver le troisième point d'un triangle équilatéral.
- Symétrie d'axe réel et seulement d'axe réel.

chap 7 : Logique et ensembles

I) Logique

- Table de vérité du NON
- Table de vérité du ET
- Table de vérité du OU.
  Pour montrer un OU . On en suppose une fausse et on montre que l'autre est vraie.
- Rappel sur l'implication et l'équivalence.

II) Modes de raisonnement

- Raisonnement par l'absurde
- Récurrence double et forte
- Raisonnement par analyse et synthèse
- Raisonnement par contraposée
- Disjonction de cas

III) Ensembles

- Définition appartenance.
- Un ensemble est TOUJOURS AVEC des accolades. Il peut être défini soit implicitement, soit explicitement.
- Définition de l'inclusion et de l'égalité d'ensembles.
- POUR MONTRER UNE EGALITE D ENSEMBLE, on privilégiera la double inclusion.
  On débutera par : Soit $x \in ...$, montrons qu'il est dans l'autre....
- Définition des parties de E.
- Définition de la réunion, de l'intersection, de la différence et du complémentaire d'un ensemble.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$ et les autres .....
- Notez qu'au passage au complémentaire les réunions deviennent intersection et réciproquement.
- Notez "la distributivité" de $\cap$ sur $\cup$ et réciproquement.
- Mêmes résultats avec des réunions, intersection, complémentaire avec un nombre quelconque d'ensemble.
- Définition d'un n-uplet et du produit cartésien.

chap 8 : Calcul de primitives

I) Résultats généraux

- Dérivée d'une fonction à valeur complexe.
- Définition d'une primitive d'une fonction f.
- prop : Les primitives de f diffèrent à une constante près.
- Liste des primitives usuelles : A CONNAITRE PARFAITEMENT.
- ATTENTION : $\int fg \neq \left(\int f\right)\left(\int g\right)$!!!!!!
- Th : Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.
  1. $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.
  2. H est une primitive de f ss'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall x \in I$, $H(x) = F(x) + \lambda$.
  3. Pour toute primitive H de f et tout $b \in I$, on a : $\int_a^b f(t)dt = H(b) - H(a)$.
- Linéarité, relation de Chasles et positivité de l'intégrale.
- On a : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ où $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $a < b$.
  REFLEXE : Rentrer la valeur absolue dans l'intégrale !!!!

II) Méthodes de calcul de primitives

- Liste de primitives usuelles.
- Intégration par parties :
  Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, $a, b \in I$ alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

- SAVOIR l'appliquer
- Changement de variable. SAVOIR écrire dans les cas pratiques $u = \varphi(t)$ donc $du = \varphi'(t)dt$
- Applications

III) Calculs pratiques

Savoir intégrer f dans les cas suivants :

- $f(t) = P(t)\ln(t)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$.
- $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $f(t) = P(t)\cos(\alpha t)$ ou $f(t) = P(t)\sin(\alpha t)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \cos(\alpha t)e^{\beta t}$ ou $f(t) = \sin(\alpha t)e^{\beta t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \sin(pt)\sin(qt)$ et $f(t) = \cos(t)^k \sin(t)^l$ (dans ce dernier cas, si k impair on pose : $u = \cos(t)$, si l impair, on pose $u = \sin(t)$, pas de méthode si les des sont paires pour l'instant – cf cours sur les sommes avec la linéarisation).
- Fractions rationnelles : $f(t) = (t-a)^r$ avec $r \neq -1$, $f(t) = \dfrac{1}{t-a}$, $f(t) = \dfrac{a}{t^2+pt+q}$, $f(t) = \dfrac{at+b}{t^2+pt+q}$
  ATTENTION : Différencier les cas où $\Delta = p^2 - 4q$ est positif ou négatif.

Liste des questions de cours :

- Étude de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ (Définition, ensemble de définition, dérivée et graphe).
- $z = re^{i\theta} = z' = r'e^{i\theta'} \iff r = r'$ et $\theta \equiv \theta'$ $[2\pi]$.
- Module et argument de $1 + e^{\frac{i\pi}{7}}$ (exercice fait en cours).
- On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

- $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)^3\cos(t)^2 dt$ (Pour les colleurs, exercice fait en cours. Pour les étudiants, il est dans la partie changement de variable).
- Calcul de $I = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{8}{3x^2+6x+30}dx$ (Pour les colleurs, exercice fait en cours).