TD 6 : Oscillateurs amortis

À préparer : Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6.6-10

Compétences	Capacités
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.

Exercice 1 : Résolution d'équations différentielles ♢

Résoudre chaque équation différentielle.

1. $$2\ddot{u} + 8\dot{u} + 3u = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u(t=0) = 5 \\ \dot{u}(t=0) = 0 \end{cases}$$

   - **Écrivons le polynôme caractéristique :** $2r^2 + 8r + 3 = 0$.
   - **Calculons le discriminant** $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 3 = 40 > 0$**. On est donc dans le régime apériodique. Les racines sont**

   $$r_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{40}}{4}$$

   et les solutions s'écrivent

   $$u(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}.$$

   - **Déterminons les constantes** A **et** B **à l'aide des conditions initiales**

   $$u(t=0) \overset{CI}{=} 5 = A + B.$$

   Par ailleurs,

   $$\dot{u}(t) = r_1 A\mathrm{e}^{r_1 t} + r_2 B\mathrm{e}^{r_2 t} \qquad \textbf{donc} \qquad \dot{u}(t=0) \overset{CI}{=} 0 = r_1 A + r_2 B.$$

   Ainsi

   $$\begin{cases} B = 5 - A \\ r_1 A = -r_2 B = -5r_2 + r_2 A \end{cases} \quad \textbf{donc} \quad \begin{cases} B = 5 + \dfrac{5r_2}{r_1 - r_2} \\ A = \dfrac{-5r_2}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

   La solution s'écrit donc finalement

   $$u(t) = \frac{-5r_2}{r_1 - r_2}\mathrm{e}^{r_1 t} + \left(5 + \frac{5r_2}{r_1 - r_2}\right)\mathrm{e}^{r_2 t}.$$

2. $$3\ddot{u} + 2\dot{u} + 3u = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u(t=0) = 5 \\ \dot{u}(t=0) = 0 \end{cases}$$

   Régime pseudo-périodique

3. $$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x(t=0) = 5 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$$

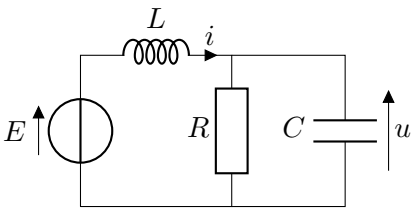
Régime critique

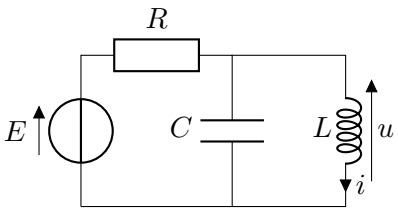
4.

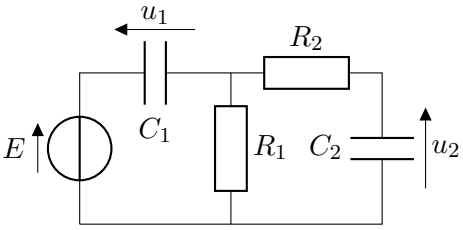
$$3\ddot{z} + 7\dot{z} + 2z = 10 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} z(t=0) = 5 \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$

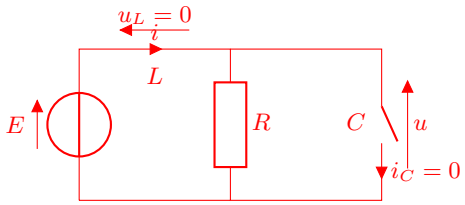
Exercice 2 : Étude de régime permanent ♢

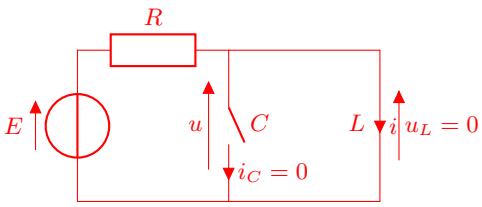
Déterminer les différentes intensités et tensions (u, i, u_1, u_2) indiquées ci-dessous lorsque le régime permanent est atteint.









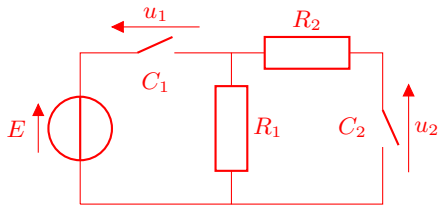


La résistance et le générateur sont en parallèle, donc $\boxed{u = E}$.

$\boxed{i = \dfrac{E}{R}}$

Le condensateur est court-circuité par la bobine, donc $\boxed{u = 0}$.

La loi des mailles et d'Ohm donnent $\boxed{i = \dfrac{E}{R}}$.



Les intensités sont nulles partout.
La loi des mailles dans la mailles de droite, sachant que les intensités et donc les tensions aux bornes des résistances sont nulles, donne $\boxed{u_2 = 0}$.
La loi des mailles à gauche donne $\boxed{u_1 = E}$.

Exercice 3 : Lecture de graphes ♢

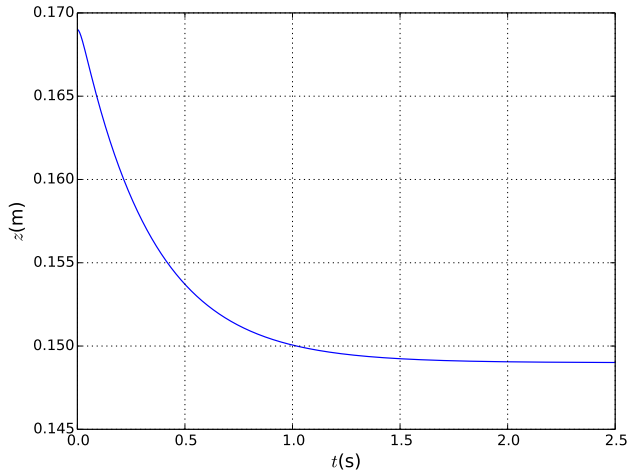
Associer à chaque graphe, le jeu de conditions initiales et le jeu de paramètre correspondant, ci-dessous.

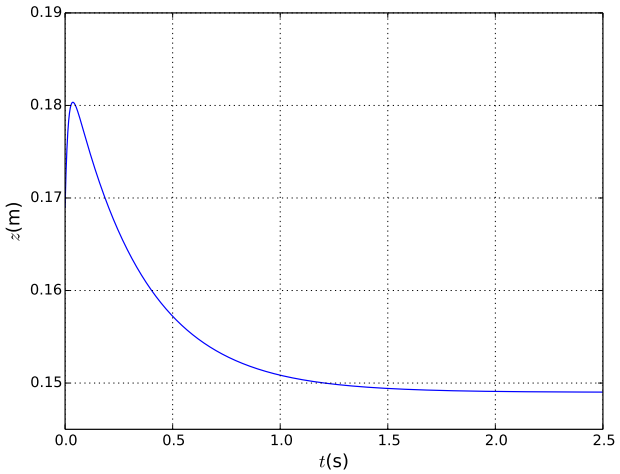
— Les conditions initiales suivantes :

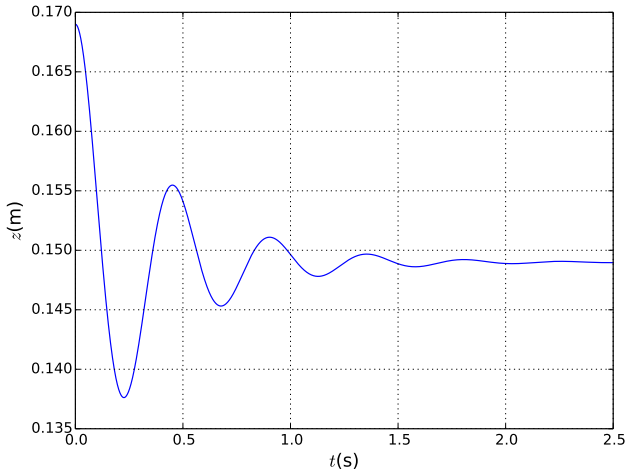
1) $z(0) = z_{\text{éq}} + 2{,}0\,\text{cm}$; $\dot{z}(0) = 0\,\text{m/s}$
2) $z(0) = z_{\text{éq}}$; $\dot{z}(0) = 1\,\text{m/s}$
3) $z(0) = z_{\text{éq}} + 2{,}0\,\text{cm}$; $\dot{z}(0) = 1\,\text{m/s}$

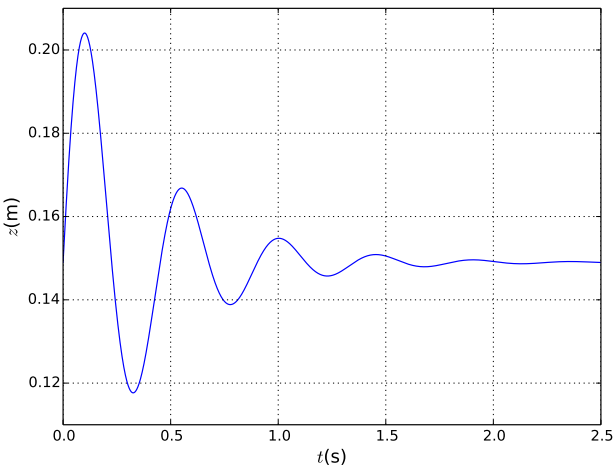
— Les couples de paramètres suivants :

a) $k = 20\,\text{N·m}^{-1}$; $m = 0{,}1\,\text{kg}$; $\alpha = 0{,}5\,\text{kg·s}^{-1}$
b) $k = 20\,\text{N·m}^{-1}$; $m = 0{,}1\,\text{kg}$; $\alpha = 7\,\text{kg·s}^{-1}$







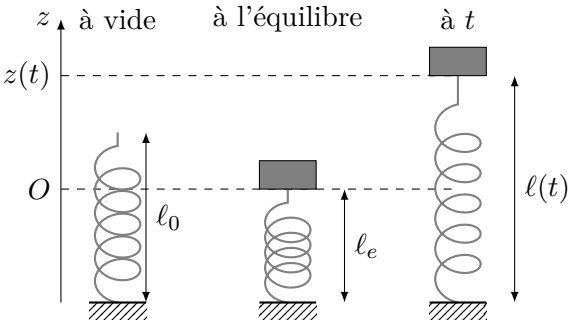


— **Les conditions initiales suivantes :**
  — $z(0) = z_{éq} + 2{,}0\,\text{cm}$; $\dot{z}(0) = 0\,\text{m/s}$ **: vitesse initiale nulle et position initiale supérieure à la position d'équilibre.**
  Graphes 1 et 3
  — $z(0) = z_{éq}$; $\dot{z}(0) = 1\,\text{m/s}$ **: vitesse initiale strictement positive et position initiale à la position d'équilibre**
  Graphe 4
  — $z(0) = z_{éq} + 2{,}0\,\text{cm}$; $\dot{z}(0) = 1\,\text{m/s}$ **: vitesse initiale strictement position et position initiale supérieure à la position d'équilibre**
  Graphe 2

— **Les couples de paramètres suivants :**
  — $k = 20\,\text{N·m}^{-1}$; $m = 0{,}1\,\text{kg}$; $\alpha = 0{,}5\,\text{kg·s}^{-1}$: $Q = 2{,}8 > \dfrac{1}{2}$
  Régime pseudo-périodique : graphes 3 et 4
  — $k = 20\,\text{N·m}^{-1}$; $m = 0{,}1\,\text{kg}$; $\alpha = 7\,\text{kg·s}^{-1}$: $Q = 0{,}2 < \dfrac{1}{2}$
  Régime apériodique : graphes 1 et 2

Exercice 4 : Fourche de VTT ♢

La fourche de VTT peut être modélisée par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, associé à un amortisseur dont la force de frottement est $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. On note m la masse appuyant sur la fourche lorsque la vététiste appuie sur le guidon (par exemple en descente).
Données : $m = 20$ kg ; $k = 2{,}5 \cdot 10^3$ N · m^{-1} ;
$\alpha = 5{,}0 \cdot 10^2$ N · s · m^{-1} ; $\ell_0 = 1{,}3$ m ;
$g = 9{,}8$ m · s^{-2} ; $v_0 = 5{,}0$ m · s^{-1}



1. La cycliste appuie sur le guidon, avec une masse m. **Établir** l'expression de la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre en fonction de m, g, k et ℓ_0. La calculer. Le ressort est-il comprimé ou étiré ?

Système : masse m
Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :
— **poids** $m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
— **force de rappel élastique :** $\vec{f_{él}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_z}$
— **force de frottement fluide de l'amortisseur :** $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\vec{u_z}$
à l'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ **et** $\vec{v} = \vec{0}$**, soit** $-mg\vec{u_z} - k(\ell_e - \ell_0)\vec{u_z} = \vec{0}$**, soit** $\boxed{\ell_e = \ell_0 - \dfrac{mg}{k} < \ell_0}$

La vététiste se réceptionne après un dénivelé. On souhaite établir la forme du mouvement du cycliste suite à ce saut. L'origine du repère est placée à la position d'équilibre.
Les conditions initiales sont $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = -v_0$ (avec $v_0 > 0$, $\dot{z}(0) < 0$ car dirigé vers le sol).

2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la position verticale $z(t) = \ell(t) - \ell_e$ et la mettre sous la forme canonique $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ en exprimant Q et ω_0 [1].

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{f_{él}} + \vec{f} \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{u_z} &= -mg\vec{u_z} - k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_z} - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u_z} \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= -mg - k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
&\text{or} \quad \ell(t) = \ell_e + z(t) \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= -mg - k(\ell_e + z(t) - \ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz(t) &= -mg - k\ell_e + k\ell_0 \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz(t) &= -mg - k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right) + k\ell_0 \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz(t) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}z(t) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z(t) &= 0
\end{aligned}$$

On identifie la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et le facteur de qualité Q tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$

3. **Calculer** Q et ω_0 (en précisant leur unité).
Quelle est la nature du mouvement de la vététiste (pseudo périodique, critique ou apériodique) ?
Exprimer puis **calculer** le temps d'amortissement caractéristique compte tenu du régime.

A.N. : $Q = \frac{\sqrt{2{,}5 \times 10^3 \times 20}}{5.10^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2,5.10^3}{20}} = \sqrt{1,25.10^2} = \sqrt{125} = \mathbf{11{,}2\,rad\cdot s^{-1}}$

C'est un régime apériodique, donc le temps d'amortissement est de l'ordre de quelques $\tau = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{15\sqrt{5}}$**s**

4. **Déterminer** la solution $z(t)$ avec les conditions initiales. On pourra introduire la grandeur $\gamma = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$.

Montrer qu'elle peut s'écrire $z(t) = -\frac{v_0}{\gamma}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\mathrm{sh}(\gamma t)$

Q étant inférieur à $\frac{1}{2}$, le régime transitoire est apériodique.

Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

Racines : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \gamma$

Solution générale : $z(t) = Ae^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}+\gamma\right)t} + Be^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}-\gamma\right)t}$

$z(0) = 0 = A + B$, **donc** $A = -B$

$\dot{z} = A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right)e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}+\gamma\right)t} + B\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right)e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}-\gamma\right)t}$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0) &= A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right) + B\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right) = -v_0 \\
-v_0 &= A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \gamma\right) - A\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \gamma\right) \\
-v_0 &= 2A\gamma \\
A &= -\frac{v_0}{2\gamma} = -B
\end{aligned}$$

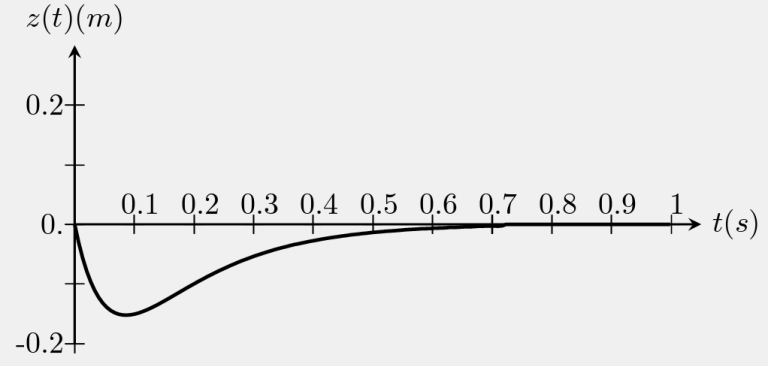
1. NON : il n'y a pas de second membre dans cette équation !

Ainsi $z(t) = -\frac{v_0}{2\gamma}e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}+\gamma\right)t} + \frac{v_0}{2\gamma}e^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}-\gamma\right)t}$

Ainsi $z(t) = \frac{v_0}{2\gamma}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(e^{-\gamma t} - e^{\gamma t}\right)$

Enfin $\boxed{z(t) = -\frac{v_0}{\gamma}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\text{sh}(\gamma t)}$

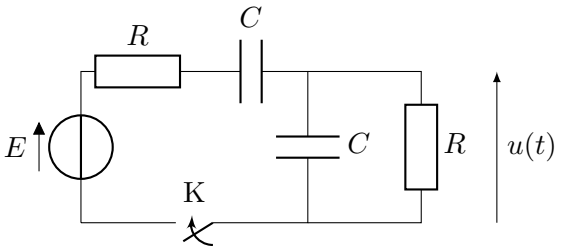
5. La figure ci-dessous représente $z(t)$. De quelle longueur s'enfonce approximativement la fourche ?



La fourche s'enfonce d'environ 15 cm.

Exercice 5 : Pont de Wien ♢♢

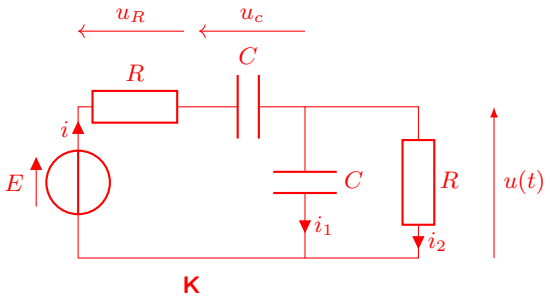
On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien.
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C, sont déchargés.
On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux résistances sont identiques.



1. **Établir**[2] l'équation différentielle vérifiée par la tension u et montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$\frac{\text{d}^2u}{\text{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\text{d}u}{\text{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

Loi des mailles : $u + u_c + u_R = E$ **(1)**
Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$ **(2)**
Lois d'Ohm : $u = Ri_2$ **(3)** et $u_R = Ri$ **(4)**
Condensateurs : $i_1 = C\frac{\text{d}u}{\text{d}t}$ **(5)** et $i = C\frac{\text{d}u_c}{\text{d}t}$ **(6)**



(3) et (5) dans (2) : $i = C\frac{\text{d}u}{\text{d}t} + \frac{u}{R}$ **(2')**

(1) : $u_c = E - u_R - u = E - Ri - u$**, avec (2') :** $u_c = E - R\left(C\frac{\text{d}u}{\text{d}t} + \frac{u}{R}\right) - u = E - RC\frac{\text{d}u}{\text{d}t} - 2u$ **(1')**

On injecte (1') dans (6) : $i = -RC^2\frac{\text{d}^2u}{\text{d}t^2} - 2C\frac{\text{d}u}{\text{d}t}$ **(6')**

On égalise (2') et (6') : $C\frac{\text{d}u}{\text{d}t} + \frac{u}{R} = -RC^2\frac{\text{d}^2u}{\text{d}t^2} - 2C\frac{\text{d}u}{\text{d}t}$

Soit $\boxed{\frac{\text{d}^2u}{\text{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\text{d}u}{\text{d}t} + \frac{u}{(RC)^2} = 0}$**, avec** $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$

2. Indications :
— Introduire 3 intensités et deux tensions.
— Écrire les 6 équations indépendantes.
— Mélanger les 6 équations pour obtenir une équation différentielle avec uniquement u, pour obtenir : $\omega_0 = 1/(RC)$.

2. **Déterminer** les conditions initiales[3] $u(t=0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$.

Les condensateurs sont initialement chargés, donc $u(0^-)=u_c(0^-)=0$

Or la tension aux bornes des condensateurs ne peuvent pas subir de discontinuité, donc $\boxed{u(0^+)=u(0^-)=0}$ **et** $u_c(0^+)=u_c(0^-)=0$

Loi des nœuds à $t=0^+$ **:** $i(0^+)=i_1(0^+)+i_2(0^+)$**, avec** $i_2(0^+)=\dfrac{u(0^+)}{R}=0$**, donc** $i(0^+)=i_1(0^+)$

Loi des mailles à $t=0^+$ **:** $u_R(0^+)+\underbrace{u_c(0+)}_{=0}+\underbrace{u(0^+)}_{=0}=E$**, soit** $Ri(0^+)=E$

Ainsi $i_1(0^+)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=\dfrac{E}{R}$**, soit** $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=\dfrac{E}{RC}}$

3. **Résoudre** complètement l'équation différentielle précédente pour déterminer l'expression de $u(t)$. **Représenter** graphiquement son allure.

Équation caractéristique : $x^2+3\omega_0 x+\omega_0^2=0$

Discriminant : $\Delta=5\omega_0^2>0$**, le régime est donc** $\boxed{\text{apériodique}}$

Racines : $x=\dfrac{-3\omega_0\pm\sqrt{5}\omega_0}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\omega_0$

Ainsi : $u(t)=Ae^{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}+Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}$

$u(0^+)=0=A+B$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=Ae^{\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)+Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)$

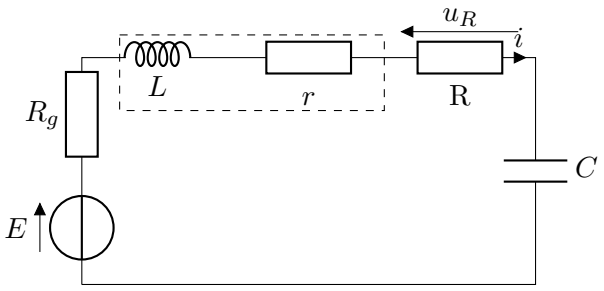
À $t=0^+$ **:** $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=\dfrac{E}{RC}=A\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)+B\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)$**, avec** $B=-A$

Ainsi $E\omega_0=2A\dfrac{-\sqrt{5}}{2}\omega_0$**, soit** $A=-\dfrac{E}{\sqrt{5}}$

Ainsi $\boxed{u(t)=\dfrac{E}{\sqrt{5}}\left(-e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}+e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)t}\right)=\dfrac{E}{\sqrt{5}}e^{-\frac{3}{2}\omega_0 t}\times 2\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)}$

Exercice 6 : Régime transitoire d'un RLC série ♢♢♢

Un générateur de tension continue E et de résistance interne R_g alimente un circuit RLC série ($C=0{,}10\,\mu\mathrm{F}$). L'inductance L et la résistance propre r de la bobine sont inconnues.



1. On attend que le régime permanent soit établi. Préciser alors les valeurs de i, u_L, u_R et u_C.

En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Ainsi $\boxed{u_L=0}$, $\boxed{i=0}$, $\boxed{u_R=Ri=0}$ **et** $\boxed{u_C=E}$.

Une fois le régime permanent atteint, on remplace l'alimentation (E,R_g) par un fil. On étudie donc la décharge d'un condensateur dans une bobine d'inductance L et de résistance interne r inconnues placées en série avec une résistance R variable.

2. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $u_C(T)$ et la mettre sous la forme canonique :

$$\ddot{u}_C+\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C+\omega_0^2 u_C=0,$$

On exprimera ω_0 et Q en fonction des données du problème.

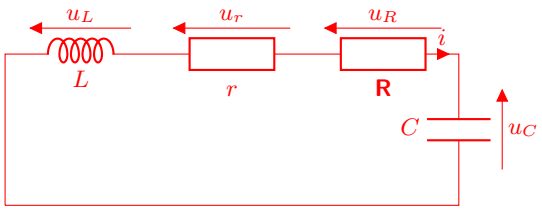
3. Indications :
— Déterminer les tensions aux bornes des condensateurs.
— Exploiter la loi d'Ohm et la loi des nœuds.
— Exploiter la loi des mailles et la loi du condensateur pour conclure : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{E}{RC}$

D'après la loi des mailles :

$$u_L + u_r + u_R + u_C = 0.$$

En utilisant les relations constitutives pour les résistances, la bobine et le condensateur,

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + Ri + u_C = 0$$
$$(r+R)\,C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0$$
$$\ddot{u}_C + \frac{r+R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0.$$



Par identification, on a

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \textbf{avec} \quad \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{r+R}{L} \\ \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases}$$

soit

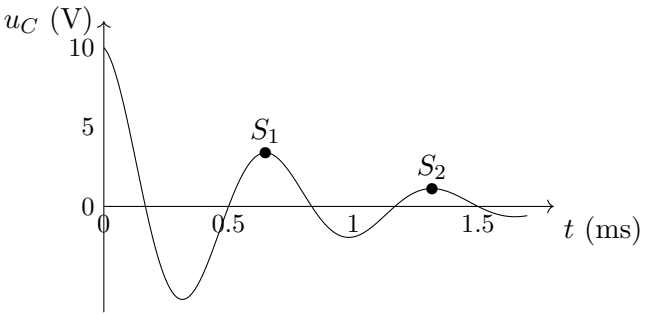
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \textbf{et} \quad Q = \frac{1}{r+R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

3. Rappeler les conditions de continuité dans une bobine et un condensateur. En déduire les valeurs de $u_C(0)$ et $\dot{u}_C(0)$.

La tension u_C aux bornes d'un condensateur est une fonction continue donc $\boxed{u_C(0) = E}$ puisque le condensateur est initialement chargé. Le courant traversant la bobine est une fonction continue donc $i(0) = 0$ puisque le courant est initialement nul lorsque le condensateur est complètement chargé. Puisque le courant traversant le condensateur s'écrit $i = C\dot{u}_C$, on déduit $\boxed{\dot{u}_C(0) = 0}$.

Comme le montre la seconde figure, le régime est pseudo-périodique.

4. Établir que ceci n'est possible que pour une valeur de résistance R inférieure à une résistance maximale $R_{\max}$ dont on donnera l'expression en fonction de r, L et C.



D'après le cours, pour que le système soit en régime périodique, il faut que $Q > 1/2$ soit

$$\frac{1}{r+R}\sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2}$$
$$(r+R)\sqrt{\frac{C}{L}} < 2$$
$$r + R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} - r \equiv R_{max}.}$$

5. Montrer que la solution physique s'écrit sous la forme :

$$u_C(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)$$

Préciser les valeurs de λ et Ω en fonction de ω_0 et Q ainsi que celles des constantes A et B.

Le régime étant pseudo-périodique, la solution s'écrit

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) \quad \textbf{avec} \quad \boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \textbf{et} \quad \boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}.}$$

On a alors

$$\dot{u}_C = -\frac{\omega_0}{2Q}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-\Omega A\sin\Omega t + \Omega B\cos\Omega t\right).$$

Déterminons à présent les constantes A et B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} u_C(t=0) = E \\ \dot{u}_C(t=0) = 0 \end{cases} \textbf{ soit } \begin{cases} A = E \\ -\dfrac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0 \end{cases} \textbf{ donc } \begin{cases} A = E \\ B = \dfrac{\omega_0 E}{2Q\Omega} = \dfrac{E}{2Q\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \end{cases} \textbf{ d'où } \begin{cases} \boxed{A = E} \\ \boxed{B = \dfrac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \end{cases}$$

6. On donne les valeurs des deux premiers maxima S_1 et S_2 pour $t > 0$.

	1er maximum	2ème maximum
Tension	$U_1 = 2{,}73\,\text{V}$	$U_2 = 0{,}73\,\text{V}$
Date	$t_1 = 0{,}65\,\text{ms}$	$t_2 = 1{,}29\,\text{ms}$

En déduire les valeurs expérimentales de la pseudo-période T et de la pseudo-pulsation Ω.

On en déduit que

$$\boxed{T = t_2 - t_1 \overset{AN}{=} 0{,}64\,\text{ms}} \quad \textbf{donc} \quad \boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T} \overset{AN}{=} 9{,}8 \times 10^3\,\text{rad·s}^{-1}.}$$

7. On pose $\delta = \ln \frac{U_1}{U_2}$, le décrément logarithmique. Montrer que $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$. En déduire l'expression de Q en fonction de δ.

À $t = t_1$ et $t = t_2$, le terme oscillant atteint des maxima égaux. Ainsi

$$\delta = \ln \frac{u_C(t_1)}{u_C(t = t_2)} = \ln \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q} t_1}}{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q} t_2}} = \ln \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t_1 - t_2)} = \frac{\omega_0}{2Q} \times T$$

soit

$$\boxed{\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}} \quad \textbf{et} \quad \boxed{Q = \frac{\omega_0 T}{2\delta}.}$$

8. On donne $\delta = 1.28$ et $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \simeq 6$. Évaluer Q et ω_0.

On sait que $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$. Ainsi, le décrément logarithmique δ s'écrit

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

On en déduit donc

$$4Q^2 - 1 = \frac{4\pi^2}{\delta^2} \quad \textbf{soit} \quad \boxed{Q = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2}} \overset{AN}{=} 2{,}5 > \frac{1}{2}.}$$

On obtient un facteur de qualité $Q > 1/2$ ce qui est attendu puisque nous sommes en régime pseudo-périodique. Par ailleurs,

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2Q\delta}{T} \overset{AN}{=} 1 \times 10^4\,\text{rad·s}^{-1}.}$$

9. À quelle condition peut-on assimiler la pseudo-période T à la période propre ? Cette approximation est-elle vérifiée ici ?

Si $Q \gg 1/2$ alors $\Omega \approx \omega_0$ et $T \approx T_0$. Ici, $Q = 2{,}5$ donc cette approximation n'est pas valable.

10. Déterminer la valeur numérique de L.

Puisque $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ alors

$$\boxed{L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \overset{AN}{=} 100\,\text{mH}.}$$

Exercice 7 : Interprétation énergétique du facteur de qualité ♢♢♢

Un circuit électrique est composé d'un interrupteur, d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L, le tout placé en série. On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

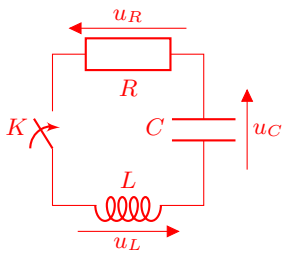
1. Établir l'équation différentielle satisfaite par la charge q du condensateur quand l'interrupteur est fermé.

D'après la loi des mailles :

$$u_R + u_C + u_L = 0.$$

Or $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $u_C = \frac{q}{C}$ **et** $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$, **d'où**

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$



On obtient donc l'équation différentielle suivante

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \textbf{soit} \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.}$$

On se place dans la suite dans le cas d'un amortissement faible, soit $Q \gg 1$.

2. Exprimer $q(t)$ sachant qu'à $t = 0\,\mathrm{s}$ on ferme l'interrupteur et qu'à cet instant la charge vaut q_0.

Puisque $Q \ll 1$, alors on est en régime pseudo-périodique et la solution générale de l'équation différentielle est

$$q(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)$$

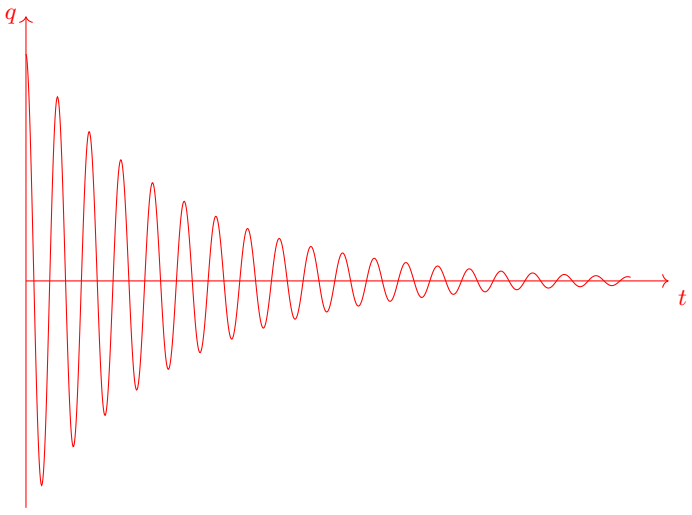
avec A et B des constantes à déterminer avec les conditions initiales. On sait que $q(t=0) = q_0$. Par ailleurs, l'intensité traversant une bobine étant une fonction continue, et qu'à $t < 0$, l'interrupteur est ouvert $i(t<0) = 0 \overset{\text{par continuité}}{=} i(t>0)$. Ainsi

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 = A \\ \dot{q}(t=0) = 0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B \end{cases} \quad \textbf{donc} \quad \begin{cases} A = q_0 \\ B = \dfrac{\omega_0 q_0}{2Q\Omega} = \dfrac{q_0}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}. \end{cases} \quad \textbf{d'où} \quad \begin{cases} \boxed{A = q_0} \\ \boxed{B = \dfrac{q_0}{\sqrt{4Q^2-1}}} \end{cases}$$

3. Déterminer la pseudo-période T, ainsi que l'ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \quad \textbf{et} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC} = \frac{2L}{R}.}$$

4. Représenter l'évolution du système sous la forme $q(t)$.



5. Évaluer $E(t)$ l'énergie contenue dans le circuit à l'instant t.

Seuls le condensateur et la bobine stockent de l'énergie : le résistor lui dissipe totalement l'énergie qu'il reçoit. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(t) &= E_{condensateur} + E_{bobine} \\ &= \frac{1}{2}Cu_c^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L\dot{q}^2.}$$

6. Que dire du signe de $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$?

Qualitativement, l'énergie initialement stockée dans le condensateur est échangée entre le condensateur et la bobine pour être finalement dissipée dans le résistor. L'énergie $E(t)$ contenue dans le circuit décroît au cours du temps donc on attend

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} < 0.}$$

7. Évaluer la variation relative α d'énergie contenue dans le circuit pendant une pseudo-période :

$$\alpha = \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)}.$$

On a

$$q(t+T) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)}\left(A\cos\left(\Omega(t+T)\right) + B\sin\left(\Omega(t+T)\right)\right) = q(t)\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}$$

et

$$\dot{q}(t+T) = -\frac{\omega_0}{2Q}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)}\left(A\cos\left(\Omega(t+T)\right) + B\sin\left(\Omega(t+T)\right)\right) + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)}\left(-\Omega A\sin\left(\Omega(t+T)\right) + \Omega B\cos\left(\Omega(t+T)\right)\right) = \dot{q}(t)\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}.$$

Ainsi

$$E(t+T) = E(t)\mathrm{e}^{-\frac{\cancel{2}\omega_0}{\cancel{2}Q}T} = E(t)\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}T}$$

d'où

$$\boxed{\alpha = \frac{E(t) - E(t)\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}T}}{E(t)} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}T}.}$$

8. En déduire une caractérisation du coefficient de qualité Q.

On peut alors exprimer le facteur de qualité Q en fonction de la variation relative α :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}T} \\
1 - \alpha &= \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{Q}T} \\
-\ln(1-\alpha) &= \frac{\omega_0}{Q}T \\
\boxed{Q &= \frac{\omega_0 T}{-\ln(1-\alpha)}.}
\end{aligned}$$