Chapitre 6

Oscillateurs amortis

Sommaire

I . Oscillateur amorti électrique . . . 1
1 . Régime libre . . . 1
2 . Réponse à un échelon . . . 2
II . Oscillateur mécanique avec frottements visqueux . . . 5
1 . Force de frottement fluide . . . 5
2 . Mise en équation . . . 5
3 . Aspect énergétique . . . 6
III . Analogie électrique et mécanique . . . 7
1 . Analyse formelle . . . 7
2 . Étude expérimentale du régime libre . . . 7
IV . Résolution générale d'une équation différentielle du second ordre . . . 8
V . Étude analytique du régime libre de l'oscillateur amorti . . . 9
1 . Dissipation importante : régime apériodique $\Delta > 0$ soit $Q < \frac{1}{2}$ . . . 10
2 . Dissipation peu importante : régime pseudo-périodique $\Delta < 0$ soit $Q > 1/2$ . . . 10
3 . Régime critique : $\Delta = 0$ soit $Q = 1/2$ . . . 11
4 . Comparaison des temps caractéristiques . . . 12
5 . Analyse de graphes expérimentaux . . . 12

Les termes dissipatifs seront désormais pris en compte dans ce chapitre : il peut s'agir de frottements mécaniques ou bien de pertes Joule liées à la présence d'une résistance dans un circuit électrique. Les méthodes vues au chapitre précédent pour établir les équations différentielles, l'analyse énergétique restent valables et ne seront pas rappelées ici.

Pour de tels systèmes, l'énergie est dissipée notamment thermiquement et l'énergie totale du système n'est plus conservée : on parle d'oscillateurs harmoniques **amortis**, et l'amortissement désigne le terme dissipatif. Comme au chapitre précédent, nous étudierons des oscillateurs harmoniques amortis électriques et mécaniques.

Si ce système est excité (force imposée par un vibreur ou générateur dans un circuit) alors on parle de **régime forcé**. Si on étudie la réponse lorsque l'excitation a disparu, c'est le **régime libre**, dans lequel on se placera par la suite.

I. Oscillateur amorti électrique

I.1. Régime libre

Compétences

Circuit RLC série.

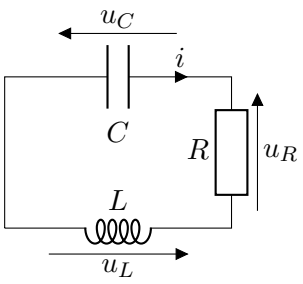
*** Capacité : Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. ***

*** Capacité : Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique ***

Exercice 1 : Équation différentielle

Soit le montage ci-contre :
avec $L = 0{,}10\,\text{H}$, $R = ?$, $C = 3\,\mu\text{F}$.
Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} u_c(t=0) = E \\ i(t=0) = 0 \\ u_L(t=0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$



1. Pour $t \geq 0$, établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la charge q.

D'après la loi des mailles :

$$u_L + u_R + u_C = 0 \quad (2)$$
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad (3)$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0 \quad (4)$$
$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (5)$$

2. Écrire cette équation différentielle sous forme canonique

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0} \quad (6)$$

en identifiant les paramètres ω_0 et Q.

On obtient donc une équation différentielle d'ordre 2, à coefficient constant, sans second membre et de la forme

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0} \quad (7)$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$ **la pulsation propre du système (sans amortissement).**

En posant $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$ **on a** $\boxed{Q = L\frac{\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$.

On retrouve une autre forme de cette équation différentielle (que l'on retiendra, appelée **écriture canonique**). Q est un nombre sans dimension toujours positif appelé **facteur de qualité**, qui décroit si la résistance est plus importante dans le cas du circuit RLC série. R est le facteur d'amortissement.

I.2. Réponse à un échelon

On considère le circuit RLC série alimenté par un générateur fournissant une tension $e(t)$ variable dans le temps appelée **échelon de tension** telle que :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0 \\ E & \text{pour} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Exercice 2 : Échelon de tension et bilan énergétique

Soit le circuit RLC série illustré ci-contre et alimenté par un échelon de tension comme défini ci-dessus. Le condensateur et la bobine sont initialement déchargés.

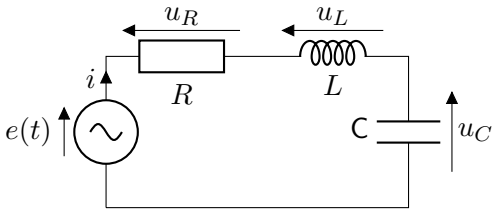


Fig. 1 Circuit RLC série excité sinusoïdalement.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

   D'après la loi des mailles

   $$e = u_R + u_L + u_C \quad \textbf{soit} \quad e = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C \quad \textbf{d'où} \quad \boxed{e = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C}$$

2. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

   Divisons l'équation différentielle par LC,

   $$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e}{LC} \quad \textbf{d'où} \quad \ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e \quad \textbf{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \textbf{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i d'une part et celle vérifiée par la tension aux bornes de la bobine.

   En repartant de la loi des mailles, et en dérivant par rapport au temps

   $$e = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C \quad \textbf{d'où} \quad 0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

   Reste à reconnaître $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$, et à multiplier par C

   $$0 = RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i.$$

   En ce qui concerne l'équation différentielle vérifiée par u_L, en dérivant la loi des mailles, nous obtenons

   $$e = Ri + u_L + u_C \quad \textbf{soit} \quad 0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{L}u_L + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C}. \tag{8}$$

   Dérivons une nouvelle fois par rapport au temps :

   $$0 = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \textbf{d'où} \quad 0 = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_L.$$

4. Déterminer les valeurs de $u_C(t=0^+)$, $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$, $i(t=0^+)$, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$, $u_L(t=0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$.

   La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue et celui-ci est initialement déchargé donc $u_C(t=0^+)=0$. L'intensité traversant une bobine est également une fonction continue et celle-ci est initialement déchargée donc $i(t=0^+)=0=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$. À $t=0^+$, le courant étant nul, $u_R(t=0^+)=0$, donc d'après la loi des mailles $u_L(t=0^+)=E$. Ainsi $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t=0^+)=\frac{u_L(t=0^+)}{L}=\frac{E}{L}$.

   En évaluant l'Éq 8 en $t=0^+$, il vient

   $$0 = \frac{R}{L}u_L(t=0^+) + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(t=0^+) + \frac{\cancel{i(t=0^+)}}{C} \quad \textbf{soit} \quad \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = \frac{R}{L}u_L(t=0^+) = \frac{RE}{L}.$$

5. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par u_C.

   Méthode habituelle.

Une simulation numérique fournit les évolutions de la tension u_C en fonction du temps pour quatre valeurs de la résistance R.

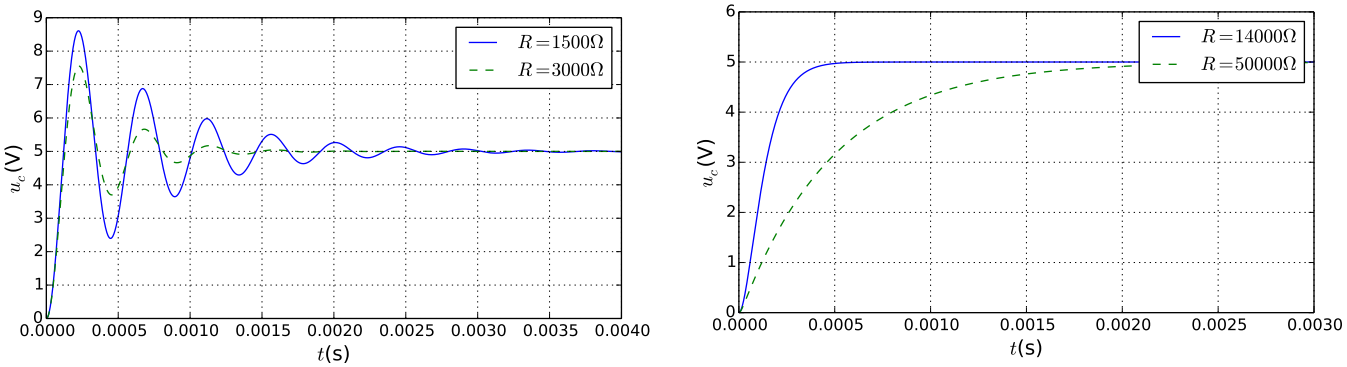


Fig. 2 Simulations d'évolutions de la tension aux bornes du condensateur, pour différentes valeurs de résistance, avec $C = 10\,\text{nF}$ et $L = 0{,}5\,\text{H}$.

6. Comment peut-on décrire la nature du régime transitoire selon la valeur de la résistance ?

   On peut faire les mêmes conclusions que précédemment, en faisant l'analogie entre le coefficient de frottement et la résistance.

   On constate que pour des résistances « faibles », la tension aux bornes du condensateur tend vers sa valeur en régime permanent en oscillant. L'amplitude de ces oscillations diminue au cours de l'évolution.

   On constate que pour des résistances « élevées », la tension aux bornes du condensateur tend vers sa valeur en régime permanent sans oscillations.

7. Comment évolue la durée du régime transitoire selon la valeur de la résistance ?

   On peut faire les mêmes conclusions que précédemment, en faisant l'analogie entre le coefficient de frottement et la résistance.

   Dans le cas des résistances « faibles » , plus la résistance est faible, plus les oscillations sont nombreuses, et plus le régime transitoire est long avant d'atteindre le régime permanent. Le cas limite est le cas de l'oscillateur harmonique LC pour lequel, en l'absence de résistance, le système oscille indéfiniment autour de la valeur en régime permanent.

   Dans le cas des résistances « élevées », plus la résistance est élevée, plus le régime transitoire est long.

8. Établir le bilan de puissance et interpréter chaque terme. Tracer l'évolution temporelle des différents termes.

D'après la loi des mailles :

$$e(t) = u_R + u_L + u_C$$

soit en multipliant par $i(t)$

$$\begin{aligned} e(t) \times i(t) &= u_R i + u_L i + u_C i \\ \mathcal{P}_{GBF}(t) &= Ri^2 + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i + u_C \times C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ &= \mathcal{P}_R(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) \\ &\equiv \mathcal{P}_R(t) + \mathcal{P}_L(t) + \mathcal{P}_C(t). \end{aligned}$$

Soit encore

$$\boxed{\mathcal{P}_{GBF}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C\right) + \mathcal{P}_{Joule}(t)}$$

où $\mathcal{E}_L$ **est l'énergie stockée dans la bobine et** $\mathcal{E}_C$ **est l'énergie stockée dans le condensateur.**

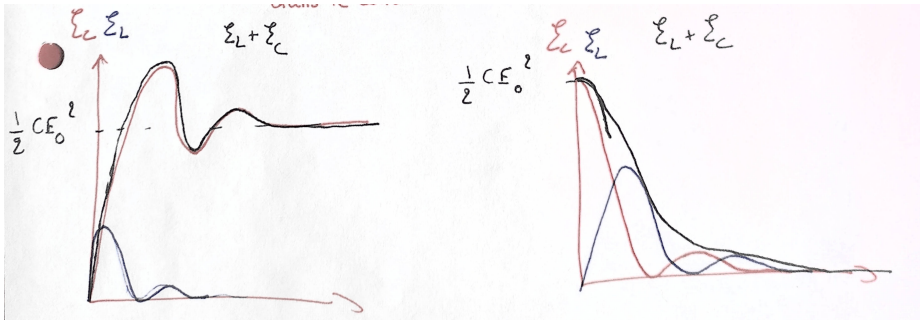


Fig. 3 Évolution des différents termes du bilan énergétique lors de la charge et de la décharge.

II. Oscillateur mécanique avec frottements visqueux

Compétences

Oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.

II.1. Force de frottement fluide

De la même manière qu'en électricité, nous ajoutons une force de frottement au modèle d'oscillateur mécanique afin d'obtenir une modélisation du réel. Dans le cadre de vitesses peu élevées (à définir en PC à partir du nombre de Reynolds), cette force s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{frot}}} = -h\vec{v}$$

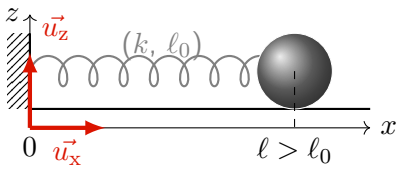
avec h une constante (appelée constante de frottement fluide).

Le signe « moins » signifie que la force de frottement est ici opposée à la vitesse de la masse. De plus, la force est d'autant plus intense que la vitesse de la masse est élevée.

II.2. Mise en équation

Exercice 3 : Oscillateur harmonique mécanique amorti

Soit une masselotte glissant sur un support horizontal avec frottements, et fixée à un ressort comme indiqué sur le schéma ci-contre.



1. Faire le bilan des forces.

La masselote est soumise à :
- **poids** $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$,
- **réaction du support** $\vec{R} = R\vec{u_z}$,
- **force de rappel du ressort** $\overrightarrow{F_{rap}} = -k\left(x - \ell_0\right)\vec{u_x}$,
- **force de frottement** $\overrightarrow{F_{frot}} = -h\dot{x}\vec{u_x}$.

2. À l'aide de la deuxième loi de Newton, établir l'équation du mouvement vérifiée par l'élongation $u(t) = x - x_{eq}$.

Appliquons le PFD (ou deuxième loi de Newton) à la masselotte dans le référentiel terrestre :

$$m\vec{a} = -mg\vec{u_z} + R\vec{u_z} - k\left(x - \ell_0\right)\vec{u_x} - h\dot{x}\vec{u_x}.$$

Soit après projection sur les axes Ox et Oz :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k\left(x - \ell_0\right) - h\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + R. \end{cases} \tag{9}$$

La masselotte ne se déplaçant que selon Ox, $\ddot{z} = 0$ donc le poids compense à nouveau la réaction du support.
À l'équilibre, on a donc

$$0 = -k\left(x_{eq} - \ell_0\right) \qquad \textbf{soit} \qquad x_{eq} = \ell_0.$$

Posons $u(t) = x - x_{eq}$, alors $\dot{u} = \dot{x}$ et $\ddot{u} = \ddot{x}$.
On obtient alors l'équation différentielle

$$m\ddot{u} + h\dot{u} + ku = 0.$$

3. Réécrire l'équation du mouvement sous forme canonique.

Commençons par la réécrire sous la forme canonique $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$. Pour ce faire, posons $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{h}{m}}}$ qui est la pulsation propre du système (la pulsation des oscillations sans frottements). Et Q devant respecter $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$, soit $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$.

> **Q est appelé facteur de qualité. On remarque que Q décroit pour des frottements plus importants, c'est-à-dire pour un oscillateur dont le mouvement s'arrête rapidement : on a un oscillateur de mauvaise qualité.**

II.3. Aspect énergétique

Compétences

Capacité : Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

Stockage et dissipation d'énergie.

Capacité : Réaliser un bilan énergétique.

Exercice 4 : Considérations énergétiques

L'équation différentielle du mouvement peut être établie à l'aide de considérations énergétiques.
Le **théorème de la puissance mécanique (TPM)** (cf chapitre 12) énonce que la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des forces non conservatives, soit ici :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{f_{frott}}\right)$$

avec $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{f_{frott}}\right)$ la puissance de la force de frottement fluide définie par : $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{f_{frott}}\right) = \overrightarrow{f_{frott}} \cdot \vec{v}$.

1. Exprimer la puissance de la force de frottement en fonction de la norme du vecteur vitesse. Quel est son signe ? En déduire comment évolue l'énergie mécanique au cours du temps en utilisant le TPM.

   $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\dot{z}^2 < 0$, donc E_m diminue au cours du temps, ce qui est cohérent avec la prise en compte des frottements.

2. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de k, m, ℓ_0, g, z, $\dot{z}$. On rappelle que $E_p^{\,élastique} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2$.

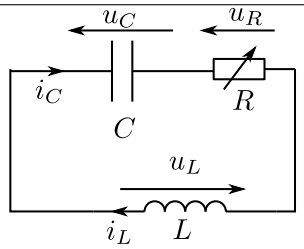
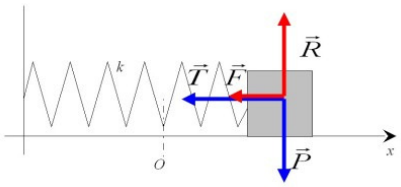
L'énergie mécanique du système est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles de pesanteur et élastique : $E_\text{m} = E_\text{c} + E_{pp} + E_{p,él} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$

3. Établir l'équation différentielle du mouvement par application du TPM.

Appliquons la loi de la puissance mécanique :
$\frac{\mathrm{d}E_\text{m}}{\mathrm{d}t} = m\ddot{z}\dot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z-\ell_0)$
$\mathcal{P}\left(\overrightarrow{f_\text{frott}}\right) = -\alpha\vec{v}\cdot\vec{v} = -\alpha\dot{z}^2$
Ainsi : $m\ddot{z}\dot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z-\ell_0) = -\alpha\dot{z}^2 \Leftrightarrow \dot{z}\left(m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz - mg - k\ell_0\right) = 0$**, ce qui nous donne,** $\dot{z} = 0$ **(cas peu intéressant) ou** $m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz - mg - k\ell_0 = 0$**, ce qui nous donne l'équation différentielle du mouvement.**

III. Analogie électrique et mécanique

III.1. Analyse formelle

Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
	
	$\vec{F} = -h\dot{x}\vec{u_\text{x}}$ et $\overrightarrow{F_\text{rap}} = -kx\vec{u_\text{x}}$
Équation différentielle	
$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$	$\ddot{u} + \frac{h}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0$
Forme canonique $\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$	
Degré de liberté	
Charge éléctrique q Courant électrique $i = \dot{q}$	Élongation x Vitesse $v = \dot{x}$
Paramètres	
Inductance L Résistance R Capacité$^{-1}$ $1/C$	Masse m Coefficient de frottement h Constante de raideur k
Énergie	
$E_L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$ $E_C = \frac{1}{2C}q^2$	$E_\text{c} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ $E_\text{p} = \frac{1}{2}kx^2$

III.2. Étude expérimentale du régime libre

III.2.a. Oscillateur mécanique

La force de rappel tend à ramener la masse à sa position d'équilibre. Cette force s'annule lorsque la position est atteinte, mais la masse a acquis une certaine énergie cinétique E_c. Comme elle possède de l'inertie, elle doit poursuivre son mouvement, au-delà de la position d'équilibre. La force de rappel agit à nouveau de manière à ce que la masse retrouve la position d'équilibre etc. La force de frottement amène le système à dissiper de l'énergie pendant son mouvement, de sorte que le point de rebroussement se rapproche progressivement de la position d'équilibre. A cause de cette diminution d'amplitude, les oscillations sont dites **pseudo-périodiques**. **Plus le coefficient de frottement est élevé, moins il y a d'oscillations**. On peut arriver à un régime apériodique.

Animation

Animation sur l'oscillateur mécanique amorti. Amortissement et pulsation propre variables à souhait

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/Oscillat1_FJ.php

III.2.b. Oscillateur électrique

Animation

On visualise au cours du temps pour le circuit RLC avec $C = 3\,\mu\text{F}$, $L = 0{,}10\,\text{H}$ (valeurs par défaut sauf pour C).

http://subaru.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/rlclibre.html

Observations :

- On a bien ω_0 indépendant de R (Pas très visible ici...),
- Pour $R < 309\,\Omega$, nous observons un comportement conforme aux prédictions réalisées avec l'oscillateur mécanique : la tension u_C tend vers 0, mais elle effectue des oscillations amorties. Le régime transitoire est appelé **pseudo périodique**,
- Pour $R > 309\,\Omega$, on ne visualise plus d'oscillations. La résistance est trop élevée pour qu'une oscillation est lieu. C'est un **régime apériodique**,
- Pour $R = 309\,\Omega$, on est dans le cas limite : c'est le **régime critique**.

IV. Résolution générale d'une équation différentielle du second ordre

Méthode *Comment résoudre une équation différentielle du second ordre ?*

Soit une équation différentielle telle que

$$ay'' + by' + cy = d \qquad \text{avec} \qquad a,\ b,\ c, \quad \text{et} \quad d \quad \text{des constantes} \in \mathbf{R}.$$

où y est une fonction du temps t. On note $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'$ et $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = y''$. Il s'agit d'une **équation différentielle du second ordre avec second membre**. La constante d est appelée second membre et on appelle équation homogène, l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

1. La solution générale s'écrit
$$y(t) = y_H(t) + y_P$$
où $y_H(t)$ est la solution de l'équation homogène et y_P est la solution particulière cherchée sous la même forme que le second membre.
2. **Détermination de la solution homogène** y_H :
   (a) **Écrire l'équation caractéristique** :
   $$ar^2 + br + c = 0.$$
   (b) **Calculer le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.
   (c) En déduire la solution :
   — si $\Delta > 0$ alors en notant les racines r_1 et r_2
   $$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad y_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t};$$
   — si $\Delta = 0$ alors la racine r est unique et
   $$r = \frac{-b}{2a} \qquad \text{et} \qquad y_H(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{rt};$$

— si $\Delta < 0$ alors les racines sont complexes telles que

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha \pm j\Omega \qquad \text{où} \qquad \alpha, \Omega \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad y_H(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right).$$

3. **Détermination de la solution particulière** y_P : on injecte y_P dans l'équation différentielle et on en déduit l'expression de y_P.
4. **Détermination des constantes A et B à l'aide des conditions initiales.**

Mémo :

Démonstration de la forme des solutions dans le régime pseudo-périodique.

Dans le régime pseudo-périodique $\Delta < 0$ et les racines s'écrivent sous la forme $r_{1,2} = -\mu \pm j\Omega$. Les solutions sont alors de la forme

$$u(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t} \qquad \text{avec} \qquad A, B \in \mathbf{C}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\mathrm{e}^{j\Omega t} + B\mathrm{e}^{-j\Omega t}\right).$$

En physique, on cherche l'ensemble des solutions **réelles**. Pour ce faire, il faut que les constantes A et B vérifient $B = A^\star$. On notera par la suite $A = \alpha + j\beta$ avec α, $\beta \in \mathbf{R}$.

Or, avec $\underline{z} = a + jb$, $\underline{z}^\star = a - jb$ donc $\underline{z} + \underline{z}^\star = 2a = 2\Re(\underline{z})$. Ici, on a

$$\begin{aligned} A\mathrm{e}^{j\Omega t} + A^\star\mathrm{e}^{-j\Omega t} &= 2\Re\left(A\mathrm{e}^{\Omega t}\right) \\ &= 2\Re\left[(\alpha + j\beta)\left(\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)\right)\right] \\ &= 2\alpha\cos(\Omega t) - 2\beta\sin(\Omega t). \end{aligned}$$

En notant $A = 2\alpha$ et $B = -2\beta$, on obtient finalement

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right).$$

V. Étude analytique du régime libre de l'oscillateur amorti

Compétences

*** Capacité : Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques ***

*** Capacité : Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité ***

*** Capacité : Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique ***

On considère dans cette partie, l'équation différentielle du second ordre, à coefficient constant, et sans second membre

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Les solutions homogènes sont de la forme $x(t) = Ae^{rt}$ avec A et r des constantes. En réinjectant cette solution dans l'équation différentielle, on en déduit son **équation caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est donné par

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right).$$

La valeur du facteur de qualité Q détermine alors la nature des solutions, suivant la valeur du discriminant.

V.1. Dissipation importante : régime apériodique $\Delta > 0$ soit $Q < \frac{1}{2}$

Alors les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad \text{avec} \qquad r_{1,2} = \frac{\frac{-\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{10}$$

Les constantes A et B se déterminent avec les CI. (vitesse et position initiales)

Analyse expérimentale (avec deux CI différentes) Au bout d'un temps suffisamment long, la masse finit par s'immobiliser : ceci est dû au fait que les deux exponentielles tendent vers zéro car les deux racines sont négatives.
Pour les fortes résistances $R > R_c$ ou $Q < \frac{1}{2}$ le circuit suit un comportement apériodique : il n'y a pas d'oscillations autour de la position d'équilibre.

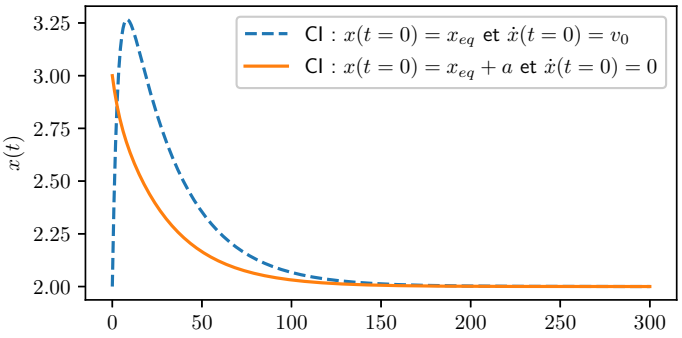


Fig. 4 Évolution de x en fonction du temps t pour le régime apériodique pour deux conditions intiales différentes.

V.2. Dissipation peu importante : régime pseudo-périodique $\Delta < 0$ soit $Q > 1/2$

On s'attend à des oscillations, mais dont l'amplitude décroit au cours du temps. Les racines du polynôme caractéristique sont :

$$r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} \pm \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}\right) \equiv -\mu \pm i\Omega)$$

avec $\mu \equiv \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, appelée pseudo-pulsation.

Alors les solutions sont de la forme

$$x(t) = e^{-\mu t}\left(A\sin\Omega t + B\cos\Omega t\right). \tag{11}$$

Les constantes A et B se déterminent avec les CI. (vitesse et position initiales)

Analyse du graphique L'allure s'interprète de la façon suivante :

- Le terme en facteur $A\sin\omega t + B\cos\omega t$ oscille avec une amplitude constante,
- Le terme en exponentielle décrit la décroissance de l'amplitude de la fonction. On dit que ce terme sert d'enveloppe aux oscillations.

Ce régime pseudo périodique correspond à des oscillations s'amortissant petit à petit. Les frottements sont faibles : ils n'empêchent pas l'apparition d'oscillations pour le système mais font diminuer leur amplitude au cours du temps. Au final, la masse finit par s'immobiliser dans la position $u = 0$ (position d'équilibre).



(a) Définition de la pseudo-période T et de la durée τ. **(b)** Pour différents facteurs de qualité Q.

Fig. 5 Évolution de $x(t)$ dans le régime pseudo-périodique.

La pseudo période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega}}$ est égale à la durée entre deux maximas successifs. On retiendra que la pseudo pulsation Ω **est différente de la pulsation propre ω_0. Plus l'amortissement est fort, plus Q est petit plus ω est éloigné de ω_0.**

τ est l'abscisse de l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote correspondant à la valeur finale :

$$\tau = \frac{1}{\mu} = \frac{2Q}{\omega_0}.$$

Il s'agit de la durée caractéristique du régime transitoire : **plus l'amortissement est fort, plus Q est petit plus τ est court.**

V.3. Régime critique : $\Delta = 0$ soit $Q = 1/2$

Les racines du polynome caractéristique sont $r = -\omega_0$ et les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme

$$x(t) = e^{-\omega_0 t}\left(At + B\right) \tag{12}$$

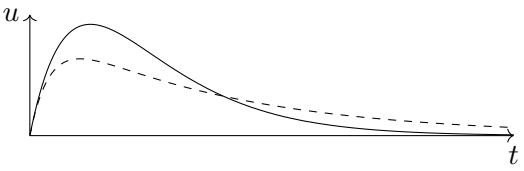
avec A et B des constantes déterminées avec les CI.

Remarque

Pour $R = R_C$, soit $Q = \frac{1}{2}$ le régime est critique.

Application 1 : Régimes critique et apériodique

On considère les régimes critique et apériodique tracés ci-contre pour une même pulsation ω_0 et deux facteurs de qualité différents.



— Comment peut-on vérifier que les deux évolutions correspondent aux mêmes conditions initiales ?

On a $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0)$ de même valeur pour les deux évolutions.

— Expliquer pourquoi le maximum est-il plus important dans le cas critique ?

Régime critique : frottements moins intenses qu'apériodique.

— Quelle autre différence note-ton entre les deux régimes ?

Régime critique, la masse s'immobilise plus vite (trait plein).

V.4. Comparaison des temps caractéristiques

Compétences

*** Capacité : Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.***

Comparons les durées caractéristiques pour chacun des régimes :

— pour le régime pseudo-périodique : $\tau = \frac{1}{\mu} = \frac{2Q}{\omega_0}$;

— pour le régime critique : $\tau = \frac{1}{\omega_0}$;

— pour le régime apériodique, il y a deux racines donc deux temps caractéristiques $\tau_{1,2}$:

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2} = \frac{-\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q} < 0$$

soit $$\tau_{1,2} = \frac{-1}{r_{1,2}} = \frac{2Q}{\omega_0 \mp \omega_0\sqrt{1-4Q^2}}$$

Comme $\tau_1 > \tau_2$, la durée caractéristique du régime transitoire est τ_1. Ainsi, dans le cas où $Q \ll 1$, $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$

$$\tau_1 = \frac{2Q}{\omega_0 - \omega_0\sqrt{1-4Q^2}} \approx \frac{2Q}{\omega_0 - \omega_0\left(1 - \frac{4Q^2}{2}\right)} \approx \frac{4Q}{\omega_0 \times 4Q^2} \approx \frac{1}{\omega_0 Q}.$$

Comparaison des temps caractéristiques On peut définir le temps de réponse à 5% comme la durée nécessaire pour que le système se trouve à moins de 5% de sa valeur en régime permanent : il se trouve entre 0,95 et 1,05 fois sa valeur finale. En calculant numériquement ce temps de réponse pour différentes valeurs de Q, à ω_0 constante et pour des conditions intiales identiques, on obtient la Fig. 6. On constate que le temps de réponse à 5% est minimal pour $Q \approx 0{,}7$ c'est à dire en régime pseudo-périodique.

Fig. 6 Temps de réponse à 5% en fonction du facteur de qualité.

Mémo :

Attention, le temps de réponse minimal dépend de sa définition. Si l'on prend la définition à 5%, le minimum est atteint pour $Q \approx 0{,}7$ tandis que pour le temps de réponse à 99%, le minimum est atteint pour $Q \approx 0{,}5$.

V.5. Analyse de graphes expérimentaux

Compétences

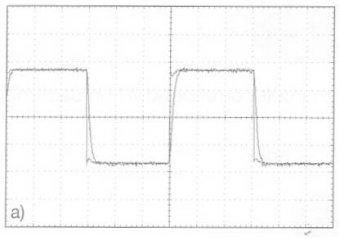
*** Capacité : Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques ***

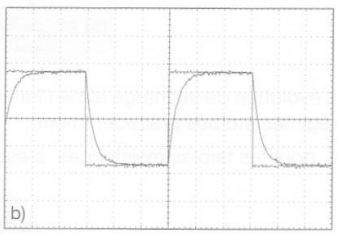
*** Capacité : Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique ***

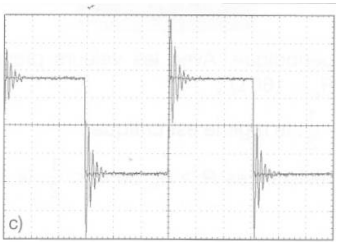
L'observation à l'oscilloscope des trois régimes pose quelques difficultés car la durée typique pendant laquelle un régime transitoire a lieu est de l'ordre de quelques τ pour le régime critique (1×10^{-5} s). Pour les deux autres régimes, il est possible d'obtenir des durées plus longues, mais les durées des régimes transitoires en électrocinétique sont souvent nettement inférieures à la seconde. Il est difficile de les observer directement. Dans ce but, on introduit

un générateur délivrant une tension $e(t)$ en créneaux entre 0 et E dans le circuit RLC. Ce dispositif a pour but de fournir périodiquement de l'énergie au système afin de relancer le régime transitoire.

Application 2 : Signal créneau







— Identifier les trois types de régimes transitoires.

a) Critique car τ le plus faible b) Apériodique c)Pseudo-périodique

— Quelle grandeur est-il le plus simple de modifier pour passer successivement de l'un à l'autre ?

Il est facile de modifier la résistance.

— Comment la période du signal en créneaux doit-elle être choisie ?

Il faut que le transitoire soit terminé avant de changer la consigne, donc $\frac{T}{2} > 5\tau$ soit $T > 10\tau$

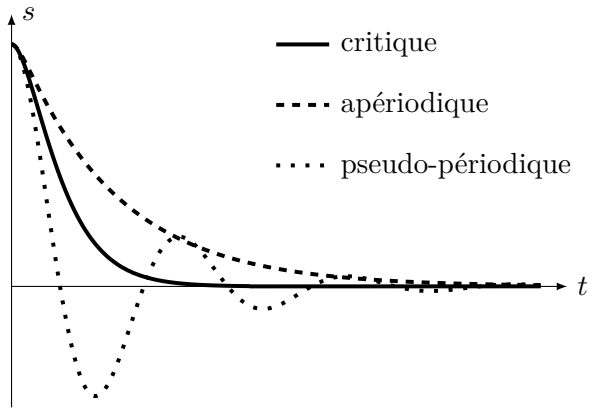
Synthèse

■ Un **oscillateur amorti** (mécanique ou électrique) en régime libre, ou en réponse à un échelon, est caractérisé par une grandeur s (position, intensité, tension, ...) qui vérifie l'**équation différentielle** :

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)}$$

- la **pulsation propre** ω_0 (en rad/s), c'est la pulsation des oscillations en l'absence d'amortissement ;
- le **facteur de qualité** Q (sans unité), **nombre positif** ;
- et $s(\infty)$ la valeur finale atteinte par s à la fin du régime transitoire (après quelques τ).

■ **Différents régimes transitoires** :



	Δ	Q	τ
Régime apériodique	$\Delta > 0$	$Q < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0 Q}$
Régime critique	$\Delta = 0$	$Q = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0}$
Régime pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > \frac{1}{2}$	$\frac{2Q}{\omega_0}$

■ **Solutions homogènes**

Forme canonique	$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$		
Discriminant	$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$		
Solutions	Régime pseudo-périodique	Régime critique	Régime apériodique
	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	$\boxed{s_H(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)}$	$\boxed{s_H(t) = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}\left(At + B\right)}$	$\boxed{s_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}}$
	$\mu = \frac{\omega_0}{2Q}$		$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$
	$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$		
	A et B étant des constantes.		

Tab. 1 Solution homogène d'une équation différentielle d'ordre deux.

■ **Durée du régime transitoire :**

$\tau \searrow$ $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ $\tau \nearrow$

La durée du régime transitoire apériodique diminue si le facteur de qualité augmente.

$Q = \frac{1}{2}$

La durée du régime transitoire pseudo-périodique augmente si le facteur de qualité augmente.

Q

- À ω_0 fixé, le régime transitoire le plus rapide est le régime critique.
- Pour un système très faiblement amorti tel que $Q \gg 1$, de nombreuses oscillations sont visibles et la durée du régime transitoire est très élevée, et $\Omega \approx \omega_0$.