chap 7 : Logique et ensembles

I) Logique
- Table de vérité du NON
- Table de vérité du ET
- Table de vérité du OU.
  Pour montrer un OU . On en suppose une fausse et on montre que l'autre est vraie.
- Rappel sur l'implication et l'équivalence.

II) Modes de raisonnement
- Raisonnement par l'absurde
- Récurrence double et forte
- Raisonnement par analyse et synthèse
- Raisonnement par contraposée
- Disjonction de cas

III) Ensembles
- Définition appartenance.
- Un ensemble est TOUJOURS AVEC des accolades. Il peut être défini soit implicitement, soit explicitement.
- Définition de l'inclusion et de l'égalité d'ensembles.
- POUR MONTRER UNE EGALITE D ENSEMBLE, on privilégiera la double inclusion.
  On débutera par : Soit $x \in ...$, montrons qu'il est dans l'autre....
- Définition des parties de E.
- Définition de la réunion, de l'intersection, de la différence et du complémentaire d'un ensemble.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$ et les autres .....
- Notez qu'au passage au complémentaire les réunions deviennent intersection et réciproquement.
- Notez "la distributivité" de $\cap$ sur $\cup$ et réciproquement.
- Mêmes résultats avec des réunions, intersection, complémentaire avec un nombre quelconque d'ensemble.
- Définition d'un n-uplet et du produit cartésien.

chap 8 : Calcul de primitives

I) Résultats généraux
- Dérivée d'une fonction à valeur complexe.
- Définition d'une primitive d'une fonction f.
- prop : Les primitives de f diffèrent à une constante près.
- Liste des primitives usuelles : A CONNAITRE PARFAITEMENT.
- ATTENTION : $\int fg \neq \left(\int f\right)\left(\int g\right)$!!!!!!
- Th : Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.
  1. $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.
  2. H est une primitive de f ss'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall x \in I$, $H(x) = F(x) + \lambda$.
  3. Pour toute primitive H de f et tout $b \in I$, on a : $\int_a^b f(t)dt = H(b) - H(a)$.
- Linéarité, relation de Chasles et positivité de l'intégrale.
- On a : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ où $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $a < b$.
  REFLEXE : Rentrer la valeur absolue dans l'intégrale !!!!

II) Méthodes de calcul de primitives
- Liste de primitives usuelles.
- Intégration par parties :
  Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, $a, b \in I$ alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

- SAVOIR l'appliquer
- Changement de variable. SAVOIR écrire dans les cas pratiques $u = \varphi(t)$ donc $du = \varphi'(t)dt$
- Applications

III) Calculs pratiques

Savoir intégrer f dans les cas suivants :

- $f(t) = P(t)\ln(t)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$.
- $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $f(t) = P(t)\cos(\alpha t)$ ou $f(t) = P(t)\sin(\alpha t)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \cos(\alpha t)e^{\beta t}$ ou $f(t) = \sin(\alpha t)e^{\beta t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \sin(pt)\sin(qt)$ et $f(t) = \cos(t)^k \sin(t)^l$ (dans ce dernier cas, si k impair on pose : $u = \cos(t)$, si l impair, on pose $u = \sin(t)$, pas de méthode si les des sont paires pour l'instant – cf cours sur les sommes avec la linéarisation).
- Fractions rationnelles : $f(t) = (t-a)^r$ avec $r \neq -1$, $f(t) = \dfrac{1}{t-a}$, $f(t) = \dfrac{a}{t^2+pt+q}$, $f(t) = \dfrac{at+b}{t^2+pt+q}$
  ATTENTION : Différencier les cas où $\Delta = p^2 - 4q$ est positif ou négatif.

chap 9 : Équations différentielles

Notation : $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

I) Équations différentielles linéaires d'ordre 1

- Définition d'une équation linéaire d'ordre 1. Définition de l'équation homogène associée. Définition d'une solution d'une équation différentielle.
- prop : Soit $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on pose $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Soit f_p une solution particulière de (E).
  g est solution de (E) ssi $g = f + f_p$ avec f solution de (E_H).
- Ce théorème nous dit que pour connaître totalement les solutions de (E), on a besoin de connaître totalement les solutions de (E_H) et une solution particulière.
- prop : Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on pose $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.
  Alors les solutions de (E_H) sur I sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de $x \mapsto a(x)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- ED avec second membre. Comment trouver une solution particulière ?
- On en voit une (typiquement si a et b sont des constantes).
- Méthode de variation de la constante.
- Théorème de superposition.
- Théorème de Cauchy.

Liste des questions de cours :

- On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)^3\cos(t)^2 dt$ (Pour les colleurs, exercice fait en cours. Pour les étudiants, il est dans la partie changement de variable).
- Calcul de $I = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{8}{3x^2+6x+30} dx$ (Pour les colleurs, exercice fait en cours).
- prop : Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on pose $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.
  Alors les solutions de (E_H) sur I sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de $x \mapsto a(x)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.