La colle devra débuter par trois développements limités usuels à prendre dans la feuille du cours.

chap 9 : Équations différentielles

Notation : $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

I) Équations différentielles linéaires d'ordre 1

- Définition d'une équation linéaire d'ordre 1. Définition de l'équation homogène associée. Définition d'une solution d'une équation différentielle.
- prop : Soit $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on pose $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Soit f_p une solution particulière de (E).
  g est solution de (E) ssi $g = f + f_p$ avec f solution de (E_H).
- Ce théorème nous dit que pour connaître totalement les solutions de (E), on a besoin de connaître totalement les solutions de (E_H) et une solution particulière.
- prop : Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on pose $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.
  Alors les solutions de (E_H) sur I sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de $x \mapsto a(x)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- ED avec second membre. Comment trouver une solution particulière ?
- On en voit une (typiquement si a et b sont des constantes).
- Méthode de variation de la constante.
- Théorème de superposition.
- Théorème de Cauchy.

II) Équation différentielle linéaire du second ordre

Nous limiterons notre étude au cas où a, b, c sont des constantes et le second membre est de la forme $P(x)e^{mx}$ où m est une constante et P un polynôme. Tous les autres cas doivent absolument comporter des indications.

- Définition d'une ED linéaire du second ordre sous la forme $(E) : a(x)y" + b(x)y' + c(x)y = d(x)$
  Dorénavant, $a = 1$, b et c sont des constantes que nous renoterons α, β, mais d reste une fonction continue.
- prop : L'équation (E) $y" + \alpha y' + \beta y = d(x)$ admet des solutions sur $\mathbb{K}$. Si f_p est une solution particulière de (E).
  Alors g est solution de (E) si et seulement si $g = f_H + f_p$ où f_H est une solution de (E_H).

- Bilan : Pour connaître totalement les solutions de (E), j'ai besoin de connaître parfaitement les solutions de (E) et une solution particulière.
- prop : L'application : $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_H) ssi $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.
  L'équation $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ est appelé équation caractéristique de (E_H) et de (E).
- Th (admis) : Soit (E) l'équation différentielle : $y" + \alpha y' + \beta y = 0$ avec α, $\beta \in \mathbb{K}$.

  On note $\alpha r^2 + \alpha r + \beta = 0$ l'équation caractéristique associée à (E_H).

  On note $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$.

  1. **Résolution de (E_H) dans le cas complexe :**
     (i) Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 les solutions (E_H) sont de la forme $\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ dans $\mathbb{C}$.
     (ii) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une seule racine que l'on note r, les solutions de (E_H) sont de la forme $(\lambda t + \mu)e^{rt}$ avec λ et μ dans $\mathbb{C}$.
  2. **Résolution de (E_H) dans le cas réel :**
     (i) Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deus racines réelles distinctes r_1 et r_2 les solutions (E_H) sont de la forme $\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
     (ii) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une seule racine que l'on note r, les solutions de (E_H) sont de la forme $(\lambda t + \mu)e^{rt}$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
     (iii) Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines conjuguées dans $\mathbb{C}$ r et $\overline{r}$ avec $r = p + \mathbf{i}q$, $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, les solutions de (E_H) sont de la forme : $e^{pt}(\lambda \cos qt + \mu \sin qt)$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$
- Bilan : Trouver les solutions de (E_H) revient à trouver des racines carrées dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Théorème de superposition.
- **On limitera notre étude au cas où $d(x)$ aux cas particuliers suivants.**

- Cas des polynômes : Soit P un polynôme, on considère $(E) : \alpha y" + \beta y' + \gamma y = P(x)$. On peut trouver une solution particulière sous la forme :
  - $x \mapsto Q(x)$ où $d^\circ(Q) = d^\circ(P)$ est de degré n si $\beta \neq 0$.
  - $x \mapsto xQ(x)$ où $d^\circ(Q) = d^\circ(P)$ est de degré n si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$.
  - $x \mapsto x^2Q(x)$ où $d^\circ(Q) = d^\circ(P)$ est de degré n si $\alpha = \beta = 0$.
- Cas $d(x) = \lambda e^{mx}$. prop : Soit m est un nombre complexe et $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère $(E) : y" + \alpha y' + \beta y = \lambda e^{mx}$. On peut trouver une solution prticulière sous la forme :
  - $x \mapsto Ae^{mx}$ où $A \in \mathbb{K}$ si m n'est pas racine de $r^2 + \alpha r + \beta$.
  - $x \mapsto Axe^{mx}$ où $A \in \mathbb{K}$ si m est racine simple de $r^2 + \alpha r + \beta$.
  - $x \mapsto Ax^2e^{mx}$ où $A \in \mathbb{K}$ si m est racine double de $r^2 + \alpha r + \beta$.
- Cas où $d(x) = \lambda e^{mx}\cos(wx)$. Si on est dans le cas réel, on repasse dans le cas complexe et on résout le cas $d(x) = \lambda e^{(m+iw)x}$, puis on prend la partie réelle de la solution complexe pour obtenir la solution réelle.

  Si on est dans le cas complexe, alors on pose $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et on utilise le théorème de superposition ....
- Théorème de Cauchy.

chap 10 : Comparaisons de fonctions

I) Limite et continuité en un point

- Notion de limite et de continuité en un point (sans les epsilon pour l'instant).
- Théorème de prolongement par continuité en un point.
- Soit I un intervalle et $a \in I$. Si f est continue sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors f est continue sur I.
- Limite à gauche et à droite en un point a.
- Courte extension à la dérivabilité à gauche et à droite en un point.

II) Croissances comparées

Rappel des résultats sur les croissances comparées.

III) Équivalents

Le but des équivalents est de trouver un terme dominant simple d'une fonction afin de trouver sa limite ou bien son comportement asymptotique.

- Définition de deux fonctions équivalentes par la limite de $\dfrac{f}{g}$.
- Conservation du signe et de la limite par équivalent.
- L'équivalent passe bien à la multiplication et au quotient.
- ATTENTION : L'équivalent passe très mal à l'addition, en particulier s'il y a "chute d'ordre".
  En particulier si vous arrivez à $f \sim 0$, vous pouvez être sur que vous vous êtes trompé ! ! ! ! Il faut repartir du départ et tout recalculer.

IV) Négligeabilité - Domination

- Définition de f négligeable devant g en a et de f dominée par g au voisinage de a.
- La négligeabilité et la domination passent très bien à la multiplication.
- ATTENTION : La négligeabilité et le quotient passent très mals au quotient et à la somme.

Liste des questions de cours :

- prop : Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on pose $(E_H) : y' + a(x)y = 0$.
  Alors les solutions de (E_H) sur I sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de $x \mapsto a(x)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $y'' + 4y' - 5y = 2\cos(x)$ (exercice fait en cours)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- Transitivité de la relation d'équivalence.