Description du mouvement du point

Ce qu'il faut connaître

- Qu'est-ce qu'un référentiel ? Et un repère ? Donner deux exemples de référentiel.
- Réaliser un schéma avec les coordonnées polaires/cylindriques. Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variations de ces coordonnées ?
- Comment s'expriment $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$?
- Quelle est la définition d'un mouvement circulaire uniforme ? Et circulaire non uniforme ?
- Pour une trajectoire plane, vers quel lieu le vecteur accélération pointe-t-il ?
- Comment s'expriment vitesse et accélération en coordonnées cylindriques/polaires ? Que deviennent-elles pour un mouvement circulaire ? circulaire uniforme ?
- Réaliser un schéma avec les coordonnées sphériques (faisant apparaître les vecteurs de la base locale). Comment s'exprime $\overrightarrow{OM}$? Quelles sont les coordonnées d'un point M ? Quels sont les domaines de variation de ces coordonnées ?
- Construire le repère de Frenet pour une trajectoire plane
- Comment s'expriment vitesse et accélération dans le repère de Frenet ?

Ce qu'il faut savoir faire

- Établir les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère cartésien.
- À partir de la donnée des fonctions $x(t), y(t), z(t)$, en déduire le vecteur vitesse, accélération, trouver l'expression de la trajectoire et tracer son allure.
- Pour un mouvement où le vecteur accélération est constant, en déduire l'évolution temporelle des vecteurs vitesse et position, puis l'équation de la trajectoire.
- Établir les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère polaire ou cylindrique.
- Exprimer à partir d'un schéma l'expression du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ en coordonnées cartésiennes, polaires ou cylindriques. En déduire l'expression du vecteur vitesse.
- Cas particulier du mouvement circulaire (uniforme ou non) : savoir retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération ; identifier les liens entre rayon de la trajectoire, norme de la vitesse, sa dérivée, et les composantes de l'accélération.

I. Cinématique : description du mouvement

1. Modèle du point matériel

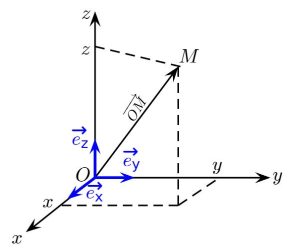
Le modèle du point matériel (ou de la masse ponctuelle) consiste à décrire le mouvement d'un objet en le représentant par un seul de ses points, son centre de masse (ou centre de gravité) (on perd de l'information : on ne connait plus la rotation de l'objet sur lui-même.)

2. Référentiel, système de coordonnées

- Référentiel : c'est un objet, qui sert de référence pour l'étude du mouvement d'autres objets. $\rightarrow$ Un mouvement (trajectoire, vitesse) dépend du référentiel dans lequel on l'étudie.
Exemples : le référentiel de la salle = référentiel terrestre
- Temps absolu : le temps mesuré est le même dans tous les référentiels.
Remarque : ceci n'est vrai que dans la théorie de la mécanique classique. Dans la théorie de la relativité restreinte, le temps s'écoule différemment selon le référentiel.
- Repère : pour mesurer la position des objets dans un référentiel donné, il faut le munir d'un repère (système d'axes et de coordonnées).

3. Rappels : Vecteurs position, vitesse et accélération en repère cartésien

On se place dans un référentiel muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- Coordonnées de M :



- Vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

- Vecteur vitesse :

- Vecteur accélération :

4. Types de mouvements particuliers

	trajectoire	$\|\vec{v}\|$	$\vec{a}$
(a) Rectiligne	droite	variable	colinéaire à $\vec{v}$
(b) Rectiligne uniforme	droite	constante	nul
(c) Circulaire	cercle	variable	quelconque
(d) Circulaire uniforme	cercle	constante	$\perp$ à $\vec{v}$

dessins associés :

Propriétés cinématiques

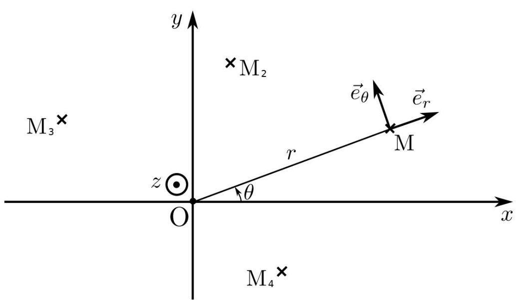
- Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.
- Si la trajectoire est courbe, alors le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de la trajectoire.

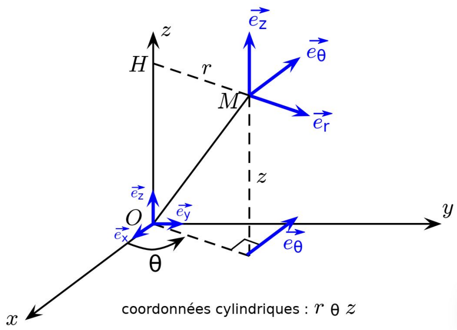
II. Coordonnées cylindriques et polaires

1. Description des coordonnées

- Les coordonnées polaires permettent de repérer un mouvement dans un plan, et sont appropriées dans le cas de mouvements circulaires, elliptiques, etc.
- Les coordonnées cylindriques sont une généralisation à 3D des coordonnées polaires.

Attention : La base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ est une base locale, elle varie en fonction du point M. Ces deux vecteurs ne sont donc pas constants, leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles !





En revanche ils sont bien de norme 1, sont orthogonaux entre eux et forment une base directe.
- Compléter les schémas ci-dessus en faisant apparaître, pour chaque point M, les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, la distance r et l'angle θ.
- Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées cylindriques et des vecteurs de la base cylindriques ?

2. Vecteurs position, vitesse et accélération

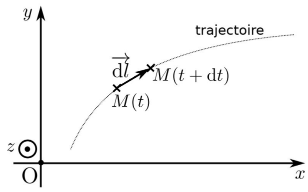
Tous ces résultats sont à savoir absolument par coeur !

Dérivée des vecteurs de la base

- Exprimer $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base cartésienne.
- Dériver par rapport au temps, exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$ dans la base cartésienne, puis dans la base cylindrique/polaire.

A partir de là, il faut être capable de trouver les expressions de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$:

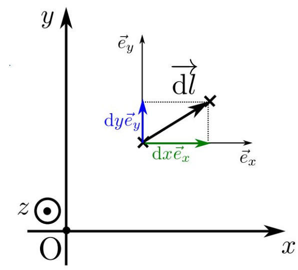
3. Déplacement élémentaire : un autre accès au vecteur vitesse



On considère un instant t, et un instant $t+\mathrm{d}t$ très proche ($\mathrm{d}t$ est une durée très courte, dite infinitésimale).
On définit le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$.

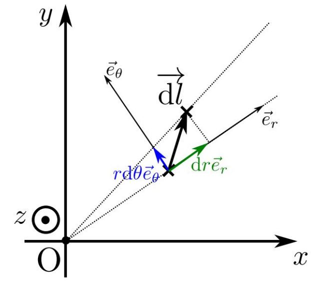
La vitesse du point M au temps t est alors : $\boxed{\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t}}$

a. En coordonnées cartésiennes



$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$
Retrouver l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes :

b. En coordonnées polaires/cylindriques



$\overrightarrow{\mathrm{d}l} =$

Remarque : On voit sur le schéma ci-dessus qu'on aurait pu donner l'expression $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + (r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$. Mais ceci s'écrit en développant $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\ \mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$, et le terme en $\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ est un infiniment petit d'ordre 2, qui est négligeable devant les autres. On trouve donc bien la même chose.

4. Cas du mouvement circulaire

a. Définitions

→ Pour étudier ce type de mouvement, il est judicieux de choisir un repère polaire dont le centre O est le centre du cercle.
→ La coordonnée radiale $r(t)$ est alors constante, égale au rayon R du cercle : $r(t) = R$.

Vitesse angulaire

On définit la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (unité SI : rad/s).
On la note souvent ω. On a donc $\omega(t) = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

Remarque : si $\omega = \dot{\theta} > 0$, alors le point M tourne dans le sens direct autour de O (θ croissant) ; et si $\omega = \dot{\theta} < 0$, alors le point M tourne dans le sens indirect autour de O (θ décroissant).

Uniforme ou non uniforme

- Mouvement circulaire uniforme : la **norme** $\|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse est constante. De façon équivalente, la vitesse angulaire ω est constante.
- Mouvement circulaire non uniforme : la **norme** du vecteur vitesse peut varier.

b. Cas uniforme

- Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, le vecteur vitesse est-il constant ?
- Le vecteur accélération est-il nul ?
- Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans le repère de coordonnées polaires. Exprimer le vecteur accélération en fonction de $\|\vec{v}\|$, R et $\vec{e}_r$ seulement.

⇒ Le vecteur accélération pointe vers le centre du cercle.

c. Cas non uniforme

Dans ce cas, $r(t) = R$, mais la vitesse angulaire peut varier dans le temps : $\omega(t) = \dot{\theta} \neq$ cst donc $\ddot{\theta} \neq 0$. Reprendre les questions précédentes. On exprimera le vecteur accélération en fonction de v et R.

5. Base de Frenet

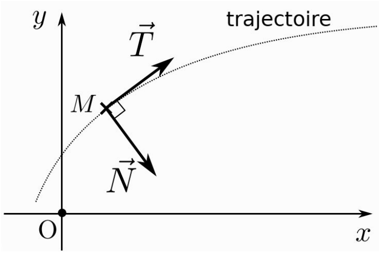
Définition de la base de Frenet

Il s'agit d'une base locale, avec deux vecteurs unitaires. Au point M :
- $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire, dans le sens de $\vec{v}$;
- $\vec{N}$ est orthogonal à la trajectoire, orienté vers l'intérieur de la courbe.

On a :

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{T}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R(t)}\vec{N}$$



avec $R(t)$ le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré (c'est le rayon du cercle qui épouse au mieux la trajectoire). (Expression admise)

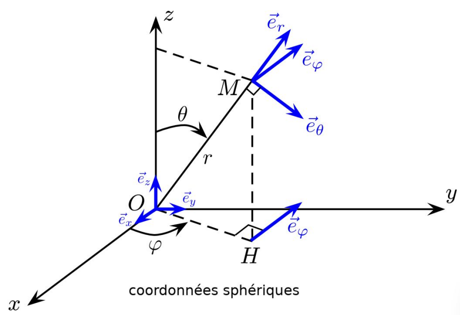
Propriétés cinématiques générales

- Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
- Si la trajectoire est courbe, alors le vecteur accélération est dirigé du côté de la concavité de la trajectoire.

III. Coordonnées sphériques

1. Description des coordonnées, vecteur position

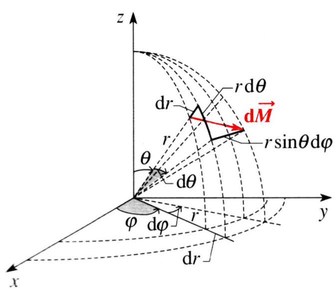
Les coordonnées sphériques sont appropriées pour le description d'un problème possédant certaines symétries sphériques.
Un point M est repéré par trois coordonnées : la distance r, et les deux angles θ et φ.
Attention : $r, \theta, \vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques ou polaires.
Ici $r = OM$ est la distance à l'origine, θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe Oz, et φ est l'angle entre $\overrightarrow{OH}$ et l'axe Ox. $r \geqslant 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$.



- Quelle est l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées sphériques et des vecteurs de la base sphérique ?

2. Vecteur vitesse (hors programme)

Attention, comme les vecteurs de base ne sont pas les mêmes qu'en coordonnées cylindriques $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \neq \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \neq -\dot{\theta}\vec{e}_r$!
Les expressions de ces dérivées étant un peu complexes, on passe plutôt par le calcul du déplacement élémentaire.
À partir de l'expression du déplacement élémentaire et de la définition de la vitesse instantanée, on obtient l'expression de $\vec{v}$ en coordonnées sphériques (pas à connaître) :



$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi$$