TD Cinématique

1 Ascenseur

Un ascenseur est animé d'un mouvement rectiligne vertical ascendant :
- uniformément accéléré d'accélération $a_a = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant une durée $t_a = 3,0 \text{ s}$;
- uniforme pendant une durée $t_u = 7 \text{ s}$;
- uniformément décéléré d'accélération de norme $a_d = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant une durée t_d jusqu'à l'arrêt.

1. Tracer la courbe représentant la vitesse en fonction du temps et en déduire la durée t_d. Y lire graphiquement la distance totale parcourue.
2. Tracer la courbe représentant l'accélération en fonction du temps. Comment peut-on y vérifier que l'ascenseur s'est bien arrêté ?
3. Tracer l'allure de la courbe représentant la position en fonction du temps.

2 Distance de sécurité

En arrivant sur une zone d'accident, chaque voiture diminue instantanément sa vitesse de v_1 à v_2. Chaque voiture mesure la même longueur l. Quelle doit être la distance D entre les voitures pour éviter une collision ? Calculer D pour $v_1 = 130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, v_2 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $l = 4 \text{ m}$.

Rép : $D = l(v_1/v_2 - 1) = 1,8 \text{ m}$

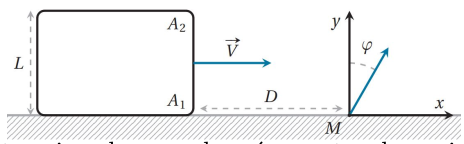
3 Virage d'un avion de chasse

Un pilote de chasse ne peut pas supporter, sans dommages, une accélération supérieure à 10 g (g étant l'accélération de la pesanteur). On considère que son avion se déplace à vitesse constante égale à Mach 2 (2400 km/h).
Estimer la place nécessaire à l'avion pour effectuer un demi-tour circulaire.

Rép :

4 Un piéton traverse la rue

Une voiture de largeur L suit un mouvement rectiligne à vitesse constante $\vec{V} = V\vec{e}_x$. A une distance D de la voiture, un piéton décide de traverser la rue en marchant suivant une ligne droite formant un angle φ par rapport à l'axe Oy à une vitesse constante $\vec{v}$.



1. On choisit l'origine des coordonnées cartésiennes au point de départ du piéton. Déterminer les coordonnées x et y des points A_2 et M en fonction du temps.
2. En déduire, pour un angle φ donné :
- l'instant t_x où les abscisses de M et A_2 sont égales ;
- l'instant t_y où les ordonnées de M et A_2 sont égales.

En déduire la vitesse minimale $v_{\min}(\varphi)$ permettant au piéton d'éviter la voiture quand il se déplace dans la direction donnée par φ.
3. Déterminer l'angle optimal φ_o et la vitesse minimale v_0 associée.

Rép : $y_M(t) = v\cos\varphi t, x_M(t) = v\sin\varphi t; t_x = \frac{D}{V - v\sin(\varphi)}, t_y = \frac{L}{v\cos(\varphi)}, v_{\min}(\varphi) = \frac{VL}{D\cos(\varphi) + L\sin(\varphi)}, v_0 = \frac{VL}{\sqrt{D^2+L^2}}$

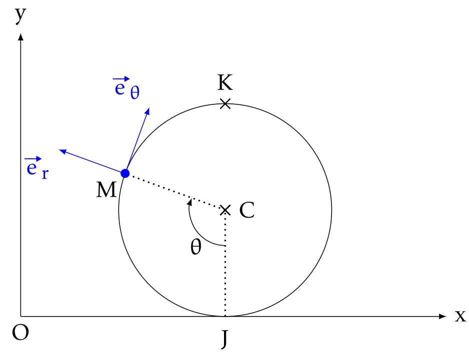
5 Basket-ball

On précise les caractéristiques de la trajectoire d'un objet en mouvement uniformément accéléré. On prend un vecteur accélération $\vec{a} = -g\vec{e}_z$, avec g une constante positive. Ces trajectoires sont caractéristiques des mouvements dans le champ de pesanteur, en l'absence de frottement.

1. L'objet se trouve à l'instant initial à la position $x = 0, z = h$ et est animé à cet instant du vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0\left(\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{e_z}\right)$, avec $\alpha \in [0°; 90°]$. Établir l'équation de sa trajectoire.
2. Déterminer l'abscisse x_C pour laquelle $z = 0$ ainsi que l'altitude maximale atteinte z_S.
3. Comment z_S varie-t-elle avec l'angle α quand v_0 reste fixé ? Avec h ?
4. Dans le cas $h = 0$, pour quelle valeur de α la distance x_C est-elle maximale ?

Rép : $z = h + x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2; x_C = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)^2 + \frac{2gh}{v_0^2}\cos^2(\alpha)}\right); z_S = h + \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}; z_{S(max)} = h + \frac{v_0^2}{2g}; x_C(h=0) = \frac{v_0^2}{g}$

$\boxed{6}$ Mouvement cycloïdal



Dans le plan (Oxy), un cercle de centre C de rayon R roule sans glisser sur l'axe (Ox) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par J le point de contact du cercle avec (Ox) et par K le point diamétralement opposé. A l'instant initial, un point M du cercle coïncide avec O.

1. Donner un exemple concret d'un tel système.
2. On note θ l'angle entre (CJ) et (CM). Déterminer une relation entre ω et θ.
3. Quelles sont les coordonnées cartésiennes de M à l'instant t ?
4. Déterminer le vecteur vitesse de M (dans la base cartésienne) et montrer qu'il est dirigé suivant MK. Pour cela, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MK}} \wedge \vec{\mathrm{v}} = \vec{0}$
5. Que devient la norme de la vitesse lorsque M passe en J ?
6. Représenter l'allure de la trajectoire de M.
7. Calculer l'accélération $\vec{a}$.

Rép : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{R}(\theta - \sin\theta)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} + \mathrm{R}(1-\cos\theta)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}}$; $\vec{\mathrm{v}} = R\omega(1-\cos\theta)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} + R\omega\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}}$; $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}=\mathrm{J}) = \vec{0}$; $\vec{\mathrm{a}} = R\omega^2\sin\theta\,\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} + R\omega^2\cos\theta\,\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}}$;

$\boxed{7}$ Mouvement d'un point sur une spirale logarithmique

Un point M décrit la courbe d'équation polaire suivante : $\left(r = be^{-t/\tau}; \theta = \omega t\right)$ avec τ, ω des constantes positives.

1. Tracer l'allure de sa trajectoire.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire. Comparer la distance à l'origine O du point M quand il est en θ_0 et à l'issue d'une révolution supplémentaire autour de O.
3. Déterminer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération du point M.
4. En déduire les normes de ces vecteurs.

Rép : $r = be^{-\theta/(\omega\tau)}$; $v_r = -\frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}, v_\theta = b\omega e^{-t/\tau}$; $a_r = \left(1/\tau^2 - \omega^2\right)be^{-t/\tau}, a_\theta = -\frac{2b\omega}{\tau}e^{-t/\tau}$; $v = b\sqrt{\omega^2 + 1/\tau^2}e^{-t/\tau}, a = b\left(\omega^2 + 1/\tau^2\right)e^{-t/\tau}$

$\boxed{8}$ Free Jump (résolution de problème)

Présentation du Free Jump sur freejump.fr :
"Cette toute nouvelle activité consistant à sauter d'une plateforme jusque dans un grand matelas d'air (airbag) est née dans le milieu du cinéma il y a une trentaine d'années. Plus particulièrement dans le domaine de la cascade, ce matelas à évolué d'année en année pour passer de l'outil du cascadeur à un moyen de secours pour les pompiers puis un matériel d'entrainement pour les sportifs de haut niveau (ski, surf, bmx, fmx...). Aujourd'hui elle est enfin disponible pour vous ! Nos années de pratique nous ont permis de développer un matelas d'une conception unique, permettant d'absorber des chutes testées à plus de 50 mètres de haut !"
Déterminer l'épaisseur du matelas à choisir pour que l'utilisateur ne se blesse pas. On prendra comme critère que le corps peut subir jusqu'à 5 g d'accélération sans dommage.

Rép : Il faut que la hauteur de chute (H) soit six fois supérieure à l'épaisseur du matelas (h)