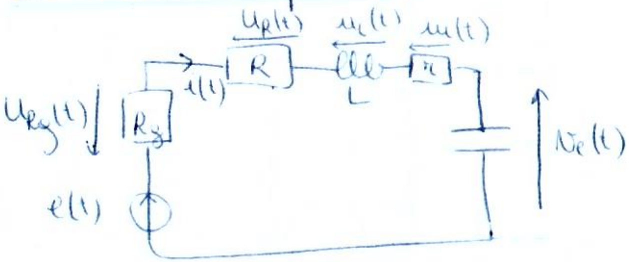
Exercice 1 : Autour du circuit RLC série

A Oscillations libres d'un circuit RLC série

Q3. * En notation temporelle :



D'après la loi des mailles

$v_e(t) + u_r(t) + u_L(t) + u_R(t) + u_{R_g}(t) = e(t)$

$\Leftrightarrow v_e(t) + \underbrace{(r+R+R_g)\,i(t)}_{\text{loi d'Ohm}} + \underbrace{L\frac{di(t)}{dt}}_{\text{Relation courant tension de la bobine}} = e(t)$

2

$\Leftrightarrow$ * $v_e(t) + (r+R+R_g)C\frac{dv_e(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_e(t)}{dt^2} = e(t)$

Relation courant-tension du condensateur

$\Leftrightarrow \frac{d^2v_e(t)}{dt^2} + \frac{r+R+R_g}{L}\frac{dv_e(t)}{dt} + \frac{v_e(t)}{LC} = \frac{e(t)}{LC}$ R'

* En notation complexe

D'après la formule du pont diviseur de tension :

$\frac{\underline{v_e}}{\underline{e}} = \frac{Z_C}{Z_r+Z_L+Z_R+Z_{R_g}+Z_C}$

$\Leftrightarrow \frac{\underline{v_e}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R_g+r+R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{(R_g+r+R)jC\omega+(j\omega)^2LC}$

$\Leftrightarrow \underline{v_e}\left[1+(R_g+R+r)jC\omega+(j\omega)^2LC\right] = \underline{e}$ 2

$\Leftrightarrow \underline{v_e} + (r+R+R_g)C(j\omega)\underline{v_e} + LC(j\omega)^2\underline{v_e} = \underline{e}$

$\Leftrightarrow$ *

Q4. * $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$ 2

$= \underbrace{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}_{>0}\underbrace{(1-2Q)}_{\gtrless 0}\underbrace{(1+2Q)}_{>0}$

$Q>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}_{=\omega \text{ pseudo pulsation}}$

$\boxed{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$

pseudo-période

$= \frac{2\pi/\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \boxed{\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$ 1

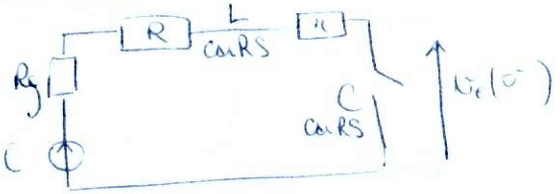
avec $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} = \boxed{2\pi\sqrt{LC}}$ 1

* Alors la solution de l'équation différentielle (homogène) est de la forme :

$v_e(t) = v_e^H(t) = \left[a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]e^{-t/\tau}$ 1 avec $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4\xi^2}}}$ et $\tau = \dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{\cancel{2}\xi T_0}{\cancel{2}\pi} = \dfrac{\xi T_0}{\pi}$ (1)

→ avec les conditions initiales.

à $t=0^-$



$i(0^-) = 0$ car ...

$u_c(0^-) = E-(R+R_g+r)\,i(0^-) = E$

Par continuité | de la tension aux bornes du condensateur
| du courant traversant la bobine

$$E = u_c(0^-) = u_c(0) = E$$
$$0 = \frac{i(0^-)}{C} = \frac{i(0)}{C} = \frac{du_c(0)}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} E = u_c(0) = a \\ 0 = \dfrac{du_c(0)}{dt} = \dfrac{2\pi}{T}b - \dfrac{a}{\tau} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = E \\ b = \dfrac{E\,T}{2\pi\tau} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = E\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-\frac{1}{4\xi^2}}\,t\right) + \frac{1}{\sqrt{4\xi^2-1}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-\frac{1}{4\xi^2}}\,t\right)\right]e^{-\frac{\pi t}{\xi T_0}}} \quad (2)$$

Q5. $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4\xi^2}}} = \dfrac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1-\frac{R'^2 C}{4L}}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{T^2 = \frac{(2\pi)^2 L\, C}{1-\underbrace{\left(\frac{R'^2}{4L}\right)}_{=b}C} \qquad a = 4\pi^2 L \qquad b = \frac{R'^2}{4L}} \quad (2)$$

Q6. * On suppose $bC \ll 1$

donc $\underbrace{T^2}_{Y} = \dfrac{aC}{1-bC} \approx \underbrace{a}_{\text{pente}}\underbrace{C}_{X}$ (1)

or pente = 3,3 SI

et $a = 4\pi^2 L$ (d'après la question précédente)

donc $L = \dfrac{3,3}{4\pi^2} \simeq 84\text{ mH}$ (1)

* $bC \ll 1 \Leftrightarrow \dfrac{R'^2}{4L}C \ll 1$ (2)

$\Leftrightarrow R' \ll 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ ($\simeq 5,8\times 10^2\ \Omega$ avec C_{max})

Rq Régime pseudo-périodique

Q7. $Q_c = \dfrac{1}{2}$

or $Q = \dfrac{1}{R'}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{R'_c}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \Leftrightarrow R'_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (2)

Q8. (2) Courbe 1 : Régime apériodique (sans dépassement)
Courbe 2 : Régime apériodique critique
Courbe 3 : Régime pseudo-périodique (avec oscillations)

Q9. $\underbrace{R_c}_{Y} = R'_c - R_g - r$

$= 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} - R_g - r$

$= \underbrace{2\sqrt{L}}_{\text{pente}} \times \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{C}}}_{X} + \underbrace{(-R_g - r)}_{\text{ordonnée à l'origine}}$ (1)

Or ordonnée à l'origine = -81 SI

donc $+(R_g + r) = +81$ SI $= 81\,\Omega$

$\Leftrightarrow \underline{r} = 81 - 50 = 31\,\Omega$ (1)

et pente $= 0{,}58$ SI

donc $2\sqrt{L} = 0{,}58$ SI $0{,}58\ H^{1/2}$

$\Leftrightarrow L = \left(\frac{0{,}58}{2}\right)^2 \simeq 84$ mH

$L \simeq 84{,}1$ mH (Q9) $\neq L \simeq 83{,}6$ mH (Q6)

Il y a donc une incertitude sur la pente

et donc il y a une incertitude sur l'ordonnée à l'origine (1)

et donc cette mesure de r est peu précise

Toute dernière question :

* D'après Q3 $\underline{H}(\omega) = \frac{u_s}{e} = \frac{1}{1 + jR'C\omega + (j\omega)^2 LC}$

par identification, on retrouve $= \frac{\boxed{1}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

$\frac{1}{\omega_0^2} = LC \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (4)

$\boxed{\frac{1}{Q\omega_0} = R'C} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\boxed{H_0 = 1}$

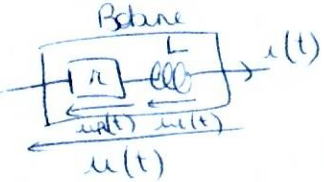
Il s'agit d'un Passe-Bas du 2ème ordre

* COURS ! $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2)

démo (2)

B Électricité

1) 

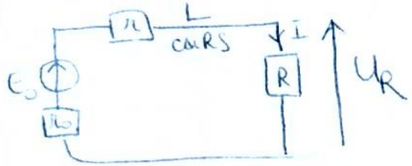
(1)

$u(t) = u_r(t) + u_L(t)$
$= r\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$

Loi d'Ohm Relation courant-tension de la Bobine idéale

2) $\begin{cases} \text{Régime stationnaire = ne dépend pas du tps} \\ \text{Régime permanent = ne varie pas ds le tps} \end{cases}$ (1)

En Régime stationnaire :



D'après la formule du pont diviseur de tension :

$U_R = \frac{R}{R + r + r_0} E_0$ (1)

$\Leftrightarrow U_R(R + r_0 + r) = RE_0$

$\Leftrightarrow r = R\frac{E_0}{U_R} - (R + r_0)$

$\Leftrightarrow r = \left(\frac{E_0}{U_R} - 1\right)R - r_0 \simeq 29\,\Omega$ (2)

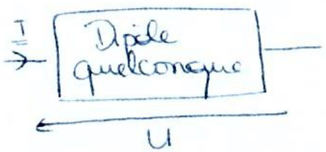
3) 

$U_e \simeq 5{,}0$ V
$U_R \simeq 2{,}5$ V (1)

4) $\underline{I} = \frac{u_R}{R} \simeq 63\,mA$ (1)

Loi d'Ohm

5) $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ *



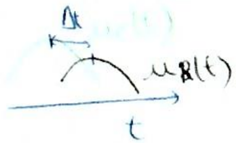
donc $Z = |\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{U}{I}$

Z est le rapport des amplitudes (1)

*

donc $Z_{AM} = \frac{U_e}{I} \approx 80\,\Omega$

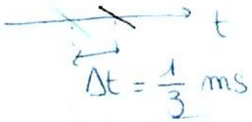
6)



donc $u_e(t)$ est en avance sur $u_R(t)$. (1)

7) $\varphi_{u_e/i} = \varphi_{u_e/u_R} > 0$ (car u_e en avance sur u_R)

$= 2\pi \Delta t f$ (car $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$) (1)



$\Delta t = \frac{1}{3}\,ms$ donc $\varphi_{u_e/i} \simeq +0{,}52$ rad

8)

(1)

$\underline{Z_{AM}} = (r+R) + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$

9) $\underline{Z_{AM}} = |\underline{Z_{AM}}| e^{j\arg(\underline{Z_{AM}})}$ par définition

$\begin{cases} |\underline{Z_{AM}}| = Z_{AM} \\ \arg(\underline{Z_{AM}}) = \arg\left(\frac{\underline{U_e}}{\underline{I}}\right) = \varphi_{u_e/i} \end{cases}$

donc $\underline{Z_{AM}} = Z_{AM}\, e^{j\varphi_{u_e/i}}$ (1)

10) 11) $\underline{Z_{AM}} = (r+R) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

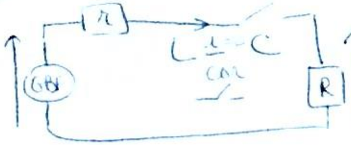
$= \underbrace{Z_{AM}\cos(\varphi_{u_e/i})}_{=\mathrm{Re}(\underline{Z_{AM}})} + j\underbrace{Z_{AM}\sin(\varphi_{u_e/i})}_{=\mathrm{Im}(\underline{Z_{AM}})}$

donc $r = Z_{AM}\cos(\varphi_{u_e/i}) - R \simeq 28\,\Omega$ (2)

et $L = \frac{1}{\omega}\left(Z_{AM}\sin(\varphi_{u_e/i}) + \frac{1}{C\omega}\right) \simeq 66\,mH$ (2)

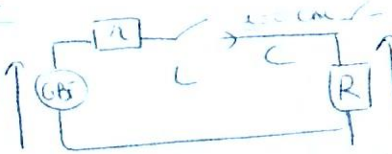
12) $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u_R}}{\underline{u_e}}}$ par définition (1)

13) BF :



$\underline{u_e}$ $\underline{u_R} = R\cancel{\underline{I}} = 0$

HF :



$\underline{u_e}$ $\underline{u_R} = R\cancel{\underline{I}} = 0$ (3)

le filtre coupe les basses / hautes fréquences donc il s'agit probablement d'un passe-bande.

14) D'après la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u}_R}{\underline{u}_e}} = \frac{R}{\underline{Z}_{AN}} = \boxed{\frac{R}{R+r+j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}}$$ (1)

15)

$$\underline{H} = \frac{\overbrace{\frac{R}{R+r}}^{= H_{max}}}{1+j\underbrace{\frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}}_{=Q}\left(\underbrace{\sqrt{LC}}_{=1/\omega_0}\,\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\,\omega}\right)}$$

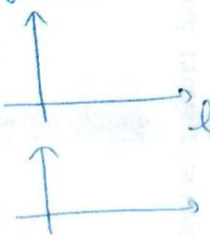
ω_0

$$\boxed{\begin{cases} H_{max} = \dfrac{R}{R+r} \\ Q = \dfrac{1}{R+r}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}}$$ (3)

16) Diagramme de Bode d'une fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$

en gain

$G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ (en dB)



$\log\omega$ (ou $\log f$ ou $\log\frac{\omega}{\omega_{ref}}$ ou $\log\frac{f}{f_{ref}}$) (2)

$\varphi = \arg(\underline{H})$ (en Rad ou °)

en phase

17)

$G_{dB}(f_R) = 20\log(H_{max})$
$= -4{,}8\text{ dB}$

$f_R = f_0 = 196\text{ Hz}$

* $-4{,}8\text{ dB} = G_{dB}(f_R) = 20\log(H_{max}) = 20\log\left(\frac{R}{R+r}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{R}{R+r} = 10^{-4,8/20}$

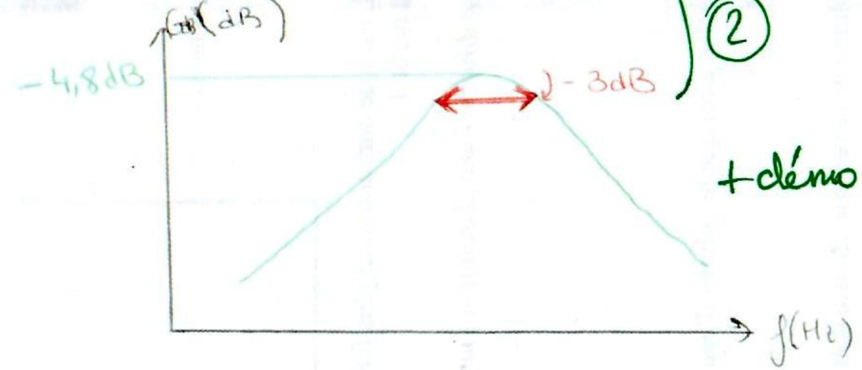
$\Leftrightarrow r = R\times\left(10^{+4,8/20} - 1\right) \simeq 30\ \Omega$ (2)

* $196\text{ Hz} = f_R = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$\Leftrightarrow L = \frac{1}{(2\pi)^2 \times C \times 196^2} \simeq 66\text{ mH}$ (2)

Rq : OK ODG

18) COURS ! $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (2)



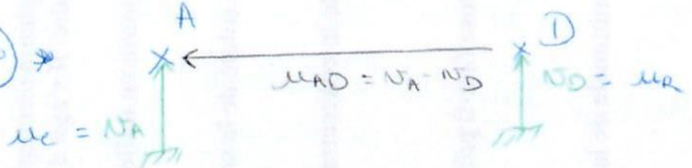
+ démo (4)

19) u_R et u_e sont en phase (énoncé)
u_R et i sont en phase (car $u_R = Ri$) (1)

donc u_e et i sont en phase $\varphi_{u_e/i} = 0\ [2\pi]$

alors $\cos(\varphi_{u_e/i}) = 1$

20) *



donc $u_{AD} = u_e - u_R$

(1)

* u_e et i sont en phase (19)
u_R et i sont en phase (car $u_R = Ri$)

donc u_{AD} et i sont en phase $\varphi_{u_{AD}/i} = 0\ [2\pi]$

alors $\cos(\varphi_{u_{AD}/i}) = 1$

21) $\underline{Z_{AD}} = \dfrac{\underline{u_{AD}}}{\underline{i}}$ (car $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$)

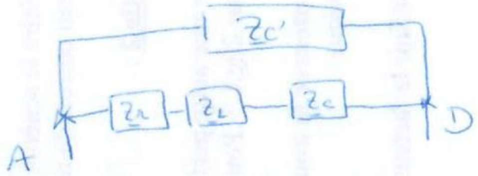
or $Re(\underline{Z_{AD}}) = |\underline{Z_{AD}}| \cos(\varphi_{u_{AD}/i})$ (car $Re(\underline{z}) = |\underline{z}| \times \cos(\arg(\underline{z}))$)

donc $\underline{Z_{AD}}$ est réelle

or $\underline{Y_{AD}} = \dfrac{1}{\underline{Z_{AD}}}$ (admittance = inverse de l'impédance)

alors $\underline{Y_{AD}}$ est réelle (1)

22)



$\dfrac{1}{\underline{Z_{AD}}} = \underline{Y_{AD}} = \dfrac{1}{\underline{Z_{C'}}} + \dfrac{1}{\underline{Z_r} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}}$ (1)

$$\boxed{\underline{Y_{AD}} = jC'\omega + \dfrac{1}{r + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}}$$

23) $Im(\underline{Y_{AD}}) = 0$

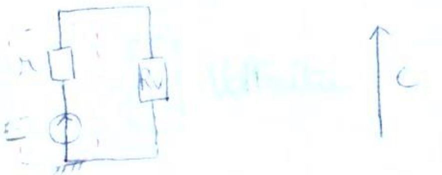
$\Leftrightarrow (\ldots)$

$\Leftrightarrow$ $$\boxed{C' = \dfrac{L - \dfrac{1}{C\omega^2}}{r^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$$ (4)

$C' \simeq 1{,}0 \times 10^{-5}\,F$

Exercice 2 : Digestion avec son pH mètre

Q1.



D'après la formule du pont diviseur de tension

$$\boxed{e = \frac{R_v}{r + R_v} E}$$

$$= \frac{1{,}0 \times 10^{6}}{1{,}0\times 10^{6} + 1{,}0 \times 10^{6}} \times 0{,}1 \times 10^{-3}$$

$e \simeq 1{,}5 \times 10^{-5}$ V

2

Q2.

$\frac{E-e}{E} < 10\% \iff \frac{e}{E} \geq 90\%$

$\iff \frac{R_v'}{r + R_v'} \geq 0{,}90$

$\iff \boxed{R_v' \geq 9r} = 9 \times 10^{6} = 9\,M\Omega$

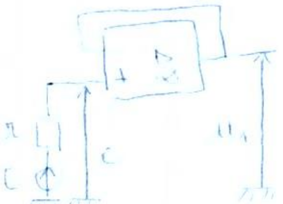
2

Q3.

Il s'agit d'un montage suiveur

ALI idéal : $i_+ = i_- = 0$; en Régime linéaire : $\varepsilon = 0 \iff v_+ = v_-$

2

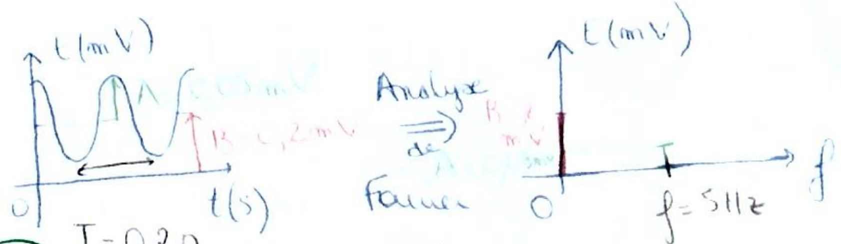


$e = v_+ = v_- = u_1 \iff u_1 = e$

$e = E + r\cancel{i}$ (avec $i = 0$) $\iff e = E$

donc $\boxed{u_1 = E}$

Q4.



$T = 0{,}2$ s

$\iff f = 1/T = 1/0{,}2 = 5$ Hz

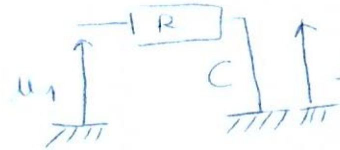
2

Q5. → $\omega \to 0$ Basse fréquence

$u_2 = u_1 + R\cancel{i}$ car $i = 0$

donc $u_2 = u_1$

→ $\omega \to +\infty$ Haute fréquence



$u_2 = 0$ car —

donc $u_2 = 0$

Le filtre transmet les basses fréquences donc coupe les hautes

donc il s'agit d'un passe-bas.

↳ Son intérêt est de supprimer la composante alternative / ne conserver que la composante continue.

2

1

Q6. D'après la formule du pont diviseur de tension

$$\underline{u_2} = \frac{Z_c}{Z_R + Z_c}\underline{u_1} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega}\underline{u_1} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{u_1}$$

$\iff \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ par identification $\boxed{H_0 = 1,\ \omega_c = \frac{1}{RC}}$

2

$$|H| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \Leftrightarrow \boxed{G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(2)

$$\arg(H) = \arg(H_0) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Leftrightarrow \boxed{\varphi(x) = -\arctan x}$$

Q8. $G(x_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{x_c = 1}$ (1)

Q9. $\boxed{G_{dB}(x)} = 20\log G(x)$

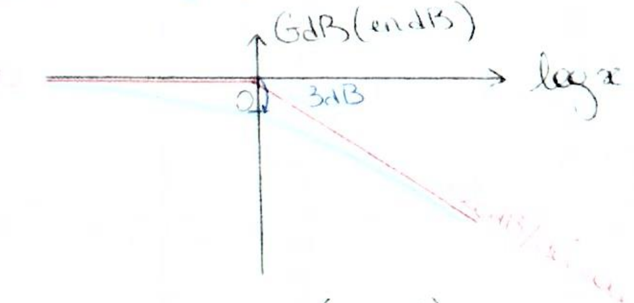
$= \cancel{20\log(1)} - 20\log(\sqrt{1+x^2})$

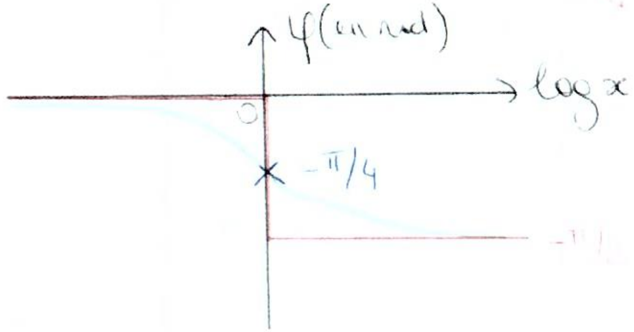
$= \boxed{-10\log(1+x^2)}$

→ $x \ll 1$ Basse fréquence $\boxed{G_{dB}(x \ll 1) = 0}$ (2)

→ $x \gg 1$ Haute fréquence $\boxed{G_{dB}(x \gg 1) = -20\log x}$

Q10.





(2)

Q11. $u_1(t) =$ $E = A_1$ $\xrightarrow[\text{PB}]{\text{composante continue}}$ $u_2(t) =$ $E = A_1$

$+$ $\qquad\qquad\qquad\qquad +$

$\frac{E}{4}\cos(10\omega_c t)$ $\xrightarrow[\text{de } \omega_c]{\text{composante à } +\text{ 1 décade}}$ $\times\frac{E}{4}\cos(\omega_c t - 1{,}5)$

(4) $G(10) \simeq \frac{1}{10}$ $\qquad A_2 \qquad \varphi_2$

$\varphi(10) = -1{,}5$ Rad

Résolut° de Pb

- courbe résonance intensité RLC série (aux bornes de R) (1)
- On relève $\begin{cases} \Delta f \simeq 370\ Hz \\ f_0 = 520\ Hz \end{cases}$ (ou rad/s, m̂ résultat)

  $\Rightarrow Q = \frac{\Delta f}{f_0} \simeq 1{,}4$ (2)

- On a $C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = 1{,}12\,\mu F$ (1)
- $R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} - R_g - r \simeq 115\,\Omega$ (2)