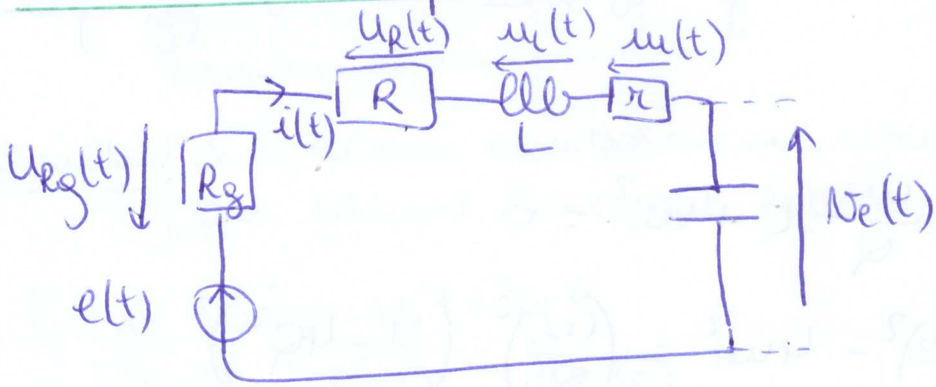
Exercice 1 : Autour du circuit RLC série

A Oscillations libres d'un circuit RLC série

Q3. * En notation temporelle :



2

D'après la loi des mailles :

$$v_e(t) + u_r(t) + u_L(t) + u_R(t) + u_{Rg}(t) = e(t)$$

$$\Leftrightarrow v_e(t) + \underbrace{(r+R+R_g)\,i(t)}_{\text{loi d'Ohm}} + \underbrace{L\frac{di(t)}{dt}}_{\text{Relation courant-tension de la bobine}} = e(t)$$

$$\Leftrightarrow (*)\ v_e(t) + (r+R+R_g)C\frac{dv_e(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_e(t)}{dt^2} = e(t)$$

Relation courant-tension du condensateur

$$\Leftrightarrow \frac{d^2v_e(t)}{dt^2} + \underbrace{\frac{\overbrace{r+R+R_g}^{R'}}{L}}_{=\frac{\omega_0}{Q}}\frac{dv_e(t)}{dt} + \frac{v_e(t)}{\underbrace{LC}_{=\omega_0^2}} = \frac{e(t)}{\underbrace{LC}_{=\omega_0^2}}$$

* En notation complexe :

D'après la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{v_e}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_r}+\underline{Z_L}+\underline{Z_R}+\underline{Z_{Rg}}+\underline{Z_C}}$$

2

$$\Leftrightarrow \frac{\underline{v_e}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R_g+r+R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{(R_g+r+R)jC\omega+(j\omega)^2LC+1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{v_e}\left[1+(R_g+R+r)jC\omega+(j\omega)^2LC\right]=\underline{e}$$

$$\Leftrightarrow \underline{v_e}+(r+R+R_g)C(j\omega)\underline{v_e}+LC(j\omega)^2\underline{v_e}=\underline{e}$$

$\Leftrightarrow$ (*)

Q4 - * $r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$

$$\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}_{>0}\underbrace{(1-2Q)}_{\gtrless 0}\underbrace{(1+2Q)}_{>0}$$ 2

$$Q>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow r_{1,2}=-\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{=\frac{1}{\tau}}\pm j\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}_{=\omega}$$

pseudo pulsation

$$\underbrace{\boxed{T}}_{\text{pseudo-période}}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$$

$$=\frac{2\pi/\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}=\boxed{\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$ 1

avec $\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}}$ 1

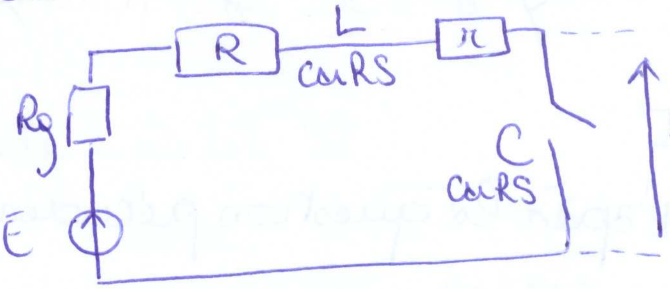
* Alors → la solution de l'équation différentielle (homogène) est de la forme :

$$v_e(t)=v_e^H(t)=\left[a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+b\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]e^{-t/\tau}$$ 1

avec $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ et $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{\cancel{2}Q\,T_0}{\cancel{2}\pi} = \dfrac{QT_0}{\pi}$ 1

→ avec les condition initiales :

à $t=0^-$:



$i(0^-) = 0$ car ⁄

$v_e(0^-) = E - (R+R_g+r)\underbrace{i(0^-)}_{0}$
$= E$

Par continuité | de la tension aux bornes du condensateur
| du courant traversant la bobine

$$E = v_e(0^-) = v_e(0) = E$$

$$0 = \frac{i(0^-)}{C} = \frac{i(0)}{C} = \frac{dv_e(0)}{dt} = 0$$ 2

$$\begin{cases} E = v_e(0) = a \\ 0 = \dfrac{dv_e(0)}{dt} = \dfrac{2\pi}{T} b - \dfrac{a}{\tau} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = E \\ b = \dfrac{E\,T}{2\pi\tau} \end{cases}$$ 2

$$\Rightarrow \boxed{v_e(t) = E\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right)\right] e^{-\frac{\pi t}{QT_0}}}$$ 2

Q5. $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} = \dfrac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1-\dfrac{R'^2C}{4L}}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{T^2 = \frac{\overbrace{(2\pi)^2 L}^{=a}\, C}{1 - \underbrace{\dfrac{R'^2}{4L}}_{=b} C} \qquad a = 4\pi^2 L \qquad b = \frac{R'^2}{4L}}$$ 2

Q6.- * On suppose $bC \ll 1$

donc $\underbrace{T^2}_{Y} = \dfrac{aC}{1-bC} \simeq \underbrace{a}_{\text{pente}}\underbrace{C}_{X}$ 1

or pente $= 3{,}3$ SI

et $a = 4\pi^2 L$ (d'après la question précédente)

donc $L = \dfrac{3{,}3}{4\pi^2} \simeq 84\,\text{mH}$ 1

* $bC \ll 1 \iff \dfrac{R'^2}{4L} C \ll 1$

2 $\iff R' \ll 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ ($\simeq 5{,}8 \times 10^2\,\Omega$ avec C_{max})

Rq : Régime pseudo-périodique

Q7.- $Q_c = \dfrac{1}{2}$

or $Q = \dfrac{1}{R'}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 2 $\iff \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{R'_c}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \iff R'_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Q8.- Courbe 1 : Régime apériodique (sans dépassement)

Courbe 2 : Régime apériodique critique

2 Courbe 3 : Régime pseudo-périodique (avec oscillation)

Q9.- $\underbrace{R_c}_{Y} = R'_c - R_g - r$

$= 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} - R_g - r$

$= \underbrace{2\sqrt{L}}_{\text{pente}} \times \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{C}}}_{X} + \underbrace{(-R_g - r)}_{\text{ordonnée à l'origine}}$ 1 or ordonnée à l'origine $= -81$ SI

donc $+(R_g + r) = +81$ SI $= 81\,\Omega$

$\Leftrightarrow r = 81 - 50 = 31\,\Omega$ 1

et pente $= 0{,}58$ SI

donc $2\sqrt{L} = 0{,}58$ SI $= 0{,}58\ H^{1/2}$

$\Leftrightarrow L = \left(\frac{0{,}58}{2}\right)^2 \simeq 84\,mH$

$L \simeq 84{,}1\,mH$ (Q9) $\neq L \simeq 83{,}6\,mH$ (Q6)

Il y a donc une incertitude sur la pente 1

et donc il y a une incertitude sur l'ordonnée à l'origine.

et donc cette mesure de r est peu précise

Toute dernière question :

* D'après Q3 : $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u_c}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j R'C\omega + (j\omega)^2 LC}$

par identification, on retrouve : 4 $= \frac{\boxed{1}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

$\frac{1}{\omega_0^2} = LC \Leftrightarrow \underset{>0}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

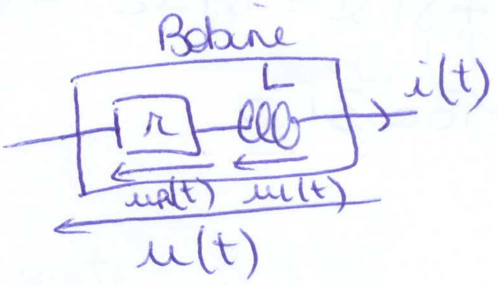
$\boxed{\frac{1}{Q\omega_0} = R'C} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\boxed{H_0 = 1}$

Il s'agit d'un Passe-Bas du 2ème ordre.

* COURS ! $\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

2+2(démo)

B Electricité

1) 

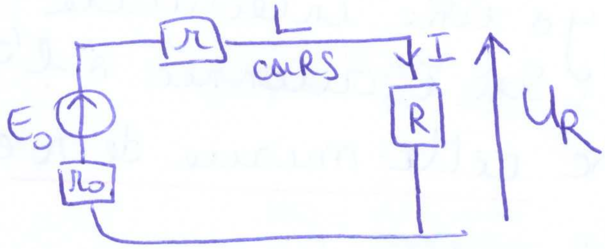
$$u(t) = u_r(t) + u_L(t) = r\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

loi d'Ohm — Relation courant-tension de la Bobine idéale

1

2) Régime stationnaire = ne dépend pas du tps ($\cancel{X}$)
Régime permanent = ne varie pas ds le tps 1 $\left\{\begin{array}{l} A(\cancel{X}) \\ f(\cancel{X}) \end{array}\right.$

En Régime stationnaire :



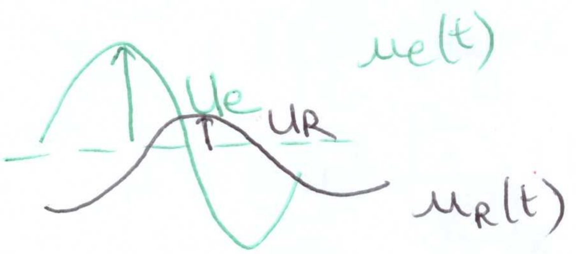
D'après la formule du pont diviseur de tension :

$$U_R = \frac{R}{R+r+r_0}E_0 \quad 1$$

$$\Leftrightarrow U_R(R+r_0+r) = RE_0$$

$$\Leftrightarrow r = R\frac{E_0}{U_R} - (R+r_0)$$

$$\Leftrightarrow r = \left(\frac{E_0}{U_R}-1\right)R - r_0 \approx 29\ \Omega \quad 2$$

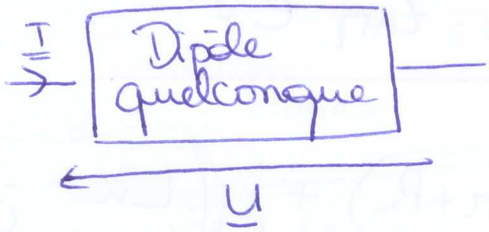
3) 

$$\boxed{\begin{array}{l} U_e \approx 5{,}0\ V \\ U_R \simeq 2{,}5\ V \end{array}} \quad 1$$

4) $\underline{I = \frac{U_R}{R}} \simeq \underline{63\,mA}$ 1

loi d'Ohm

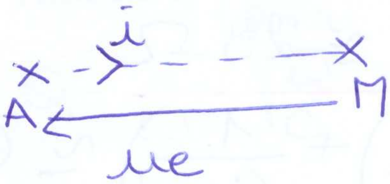
5) $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ *



donc $Z = |\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{U}{I}$ 1

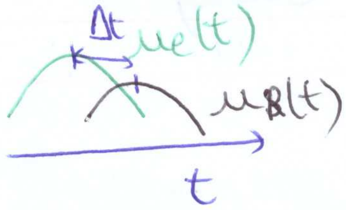
Z est le rapport des amplitudes

*



donc $\underline{Z_{AM} = \frac{U_e}{I} \approx 80\Omega}$

6)



donc $u_e(t)$ est en avance sur $u_R(t)$. 1

7) $\varphi_{u_e/i} = \varphi_{u_e/u_R} > 0$ (car u_e en avance sur u_R)

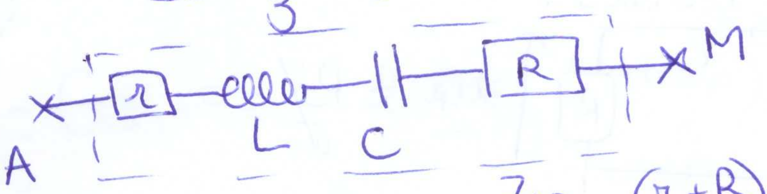
$= 2\pi \Delta t f$ (car $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$)

1

$\Delta t = \frac{1}{3}\,ms$

donc $\underline{\varphi_{u_e/i} \simeq +0{,}52\ \text{Rad}}$

8)



1

$\underline{\underline{Z_{AM}} = (r+R) + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

9) $\underline{Z_{AM}} = |\underline{Z_{AM}}|\, e^{j \arg(\underline{Z_{AM}})}$ par définition

$$\begin{cases} |\underline{Z_{AN}}| = Z_{AN} \\ \arg(\underline{Z_{AN}}) = \arg\left(\dfrac{\underline{U_e}}{\underline{I}}\right) = \varphi_{u_e/i} \end{cases}$$

donc $\underline{Z_{AN}} = Z_{AN}\, e^{j\varphi_{u_e/i}}$ 1

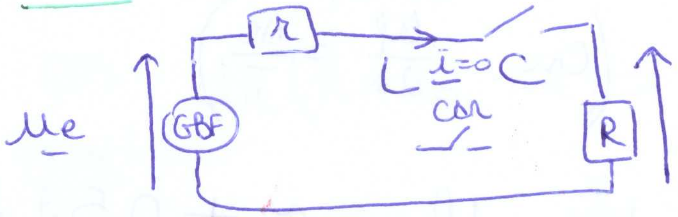
10) 11) $$\underline{Z_{AN}} = (r+R) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$
$$= \underbrace{Z_{AN}\cos(\varphi_{u_e/i})}_{=\mathrm{Re}(\underline{Z_{AN}})} + j\underbrace{Z_{AN}\sin(\varphi_{u_e/i})}_{=\mathrm{Im}(\underline{Z_{AN}})}$$

donc $r = Z_{AN}\cos(\varphi_{u_e/i}) - R \simeq 28\ \Omega$ 2

et $L = \dfrac{1}{\omega}\left(Z_{AN}\sin(\varphi_{u_e/i}) + \dfrac{1}{C\omega}\right) \simeq 66\ \text{mH}$ 2

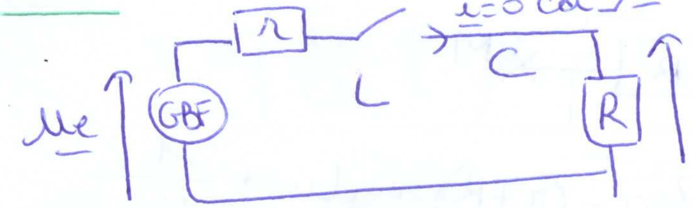
12) $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\underline{u_R}}{\underline{u_e}}}$ par définition 1

13) BF :



$\underline{u_R} = R\underline{i} = 0$ avec $\underline{i} = 0$

HF :



$\underline{u_R} = R\underline{i} = 0$ avec $\underline{i} = 0$ 3

le filtre coupe les basses / hautes fréquences donc il s'agit probablement d'un passe-bande.

(14) D'après la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{\underline{H}} = \frac{\underline{u_R}}{\underline{u_e}} = \frac{R}{\underline{Z_{AN}}} = \boxed{\frac{R}{R+r+j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}}$$

1

(15)

$$\underline{H} = \frac{\underbrace{\frac{R}{R+r}}_{=H_{max}}}{1 + j\underbrace{\frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}}_{=Q}\left(\underbrace{\sqrt{LC}}_{=1/\omega_0}\,\omega - \frac{1}{\underbrace{\sqrt{LC}}_{=\omega_0}\,\omega}\right)}$$

$$\boxed{\begin{cases} H_{max} = \dfrac{R}{R+r} \\ Q = \dfrac{1}{R+r}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}}$$

3

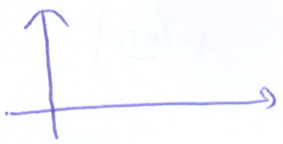
(16) Diagramme de Bode d'une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$

en gain

$G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ (en dB)

$\log\omega$ (ou $\log f$ ou $\log\frac{\omega}{\omega_{ref}}$ ou $\log\frac{f}{f_{ref}}$)

$\varphi = \arg(\underline{H})$ (en Rad ou °)



en phase

2

17)

$\underline{G_{dB}(f_R) = 20\log(H_{max})}$
$\underline{= -4{,}8\,dB}$

$\underline{f_R = f_0} = \underline{186\,Hz}$

$*\quad -4{,}8\,dB = G_{dB}(f_R) = 20\log(H_{max}) = 20\log\left(\frac{R}{R+r}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{R}{R+r} = 10^{-4{,}8/20}$

2

$\Leftrightarrow \underline{r = R\times\left(10^{+4{,}8/20} - 1\right) \simeq 30\,\Omega}$

$*\quad 186\,Hz = f_R = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

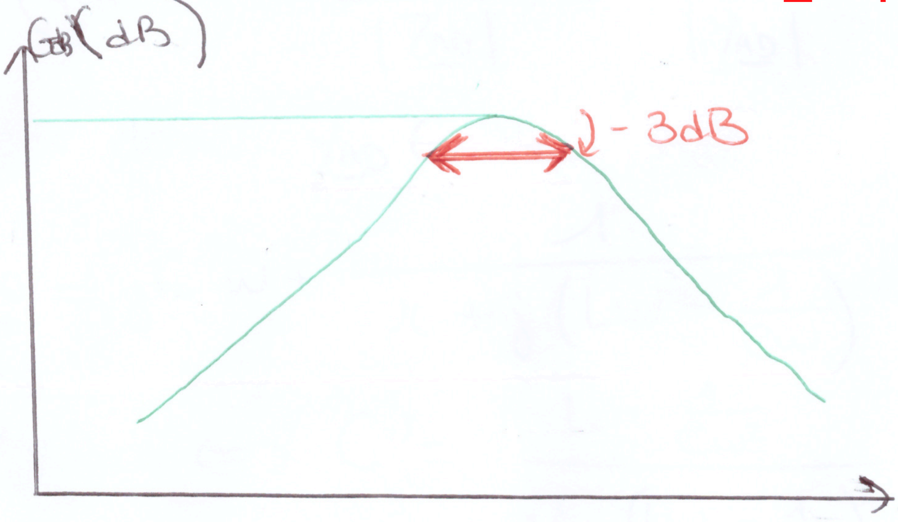
2

$\Leftrightarrow \underline{L =} \frac{1}{(2\pi)^2 \times C \times 186^2} \underline{\simeq 66\,mH}$

Rq : OK ODG

18) COURS ! $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

2+4(démo)

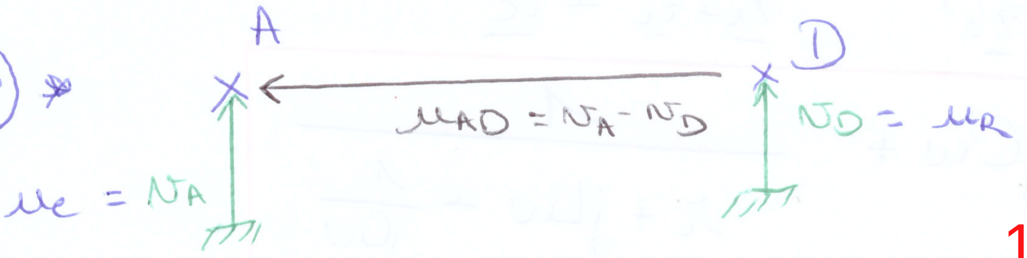


19) u_R et u_e sont en phase (énoncé)
u_R et i sont en phase (car $u_R = Ri$)

donc u_e et i sont en phase $\varphi_{u_e/i} \equiv 0 \, [2\pi]$

alors $\cos(\varphi_{u_e/i}) = 1$ 1

20) *



1

donc $u_{AD} = u_e - u_R$

* u_e et i sont en phase (19)
u_R et i sont en phase (car $u_R = Ri$)
donc u_{AD} et i sont en phase $\varphi_{u_{AD}/i} \equiv 0 \, [2\pi]$
alors $\cos(\varphi_{u_{AD}/i}) = 1$

21) $\underline{Z}_{AD} = \dfrac{\underline{u}_{AD}}{\underline{i}}$ (car $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$)

or $Re(\underline{Z}_{AD}) = |\underline{Z}_{AD}| \cos(\varphi_{u_{AD}/i})$ (car $Re(\underline{z}) = |\underline{z}| \times \cos(\arg(\underline{z}))$)

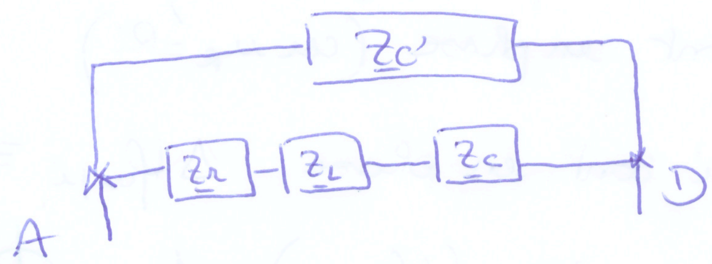
donc $\underline{Z}_{AD}$ est Réelle

or $\underline{Y}_{AD} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{AD}}$ (admittance = inverse de l'impédance)

1

alors $\underline{Y}_{AD}$ est réelle

22)



$$\frac{1}{\underline{Z}_{AD}} = \underline{Y}_{AD} = \frac{1}{\underline{Z}_{C'}} + \frac{1}{\underline{Z}_r + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}$$

$$\boxed{\underline{Y}_{AD} = jC'\omega + \frac{1}{r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}}$$ 1

23) $Im(\underline{Y}_{AD}) = 0$

$\Leftrightarrow (\dots)$

$$\Leftrightarrow \boxed{C' = \frac{L - \frac{1}{C\omega^2}}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$ 4

$\underline{C' \simeq 1{,}0 \times 10^{-5} F}$