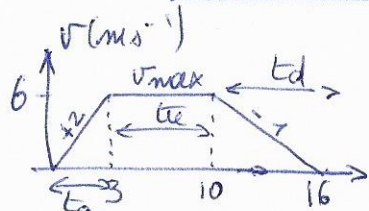


Cinématique

Ascenseur

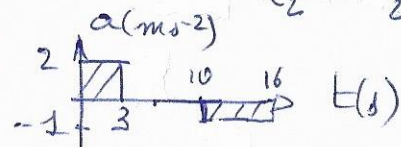
1)



• la deceleration vaut
 $a_d = \frac{v_{max}}{t_d} \Rightarrow t_d = \frac{6 \text{ m/s}}{1 \text{ m/s}^2} = 6 \text{ s}$

• distance $d = \int v dt = \text{aire sous la courbe} = \text{somme "triangles"}$
 $\Rightarrow d = v_{max} \left(\frac{1}{2} t_a + \frac{1}{2} t_d + t_u \right) = 69 \text{ m}$

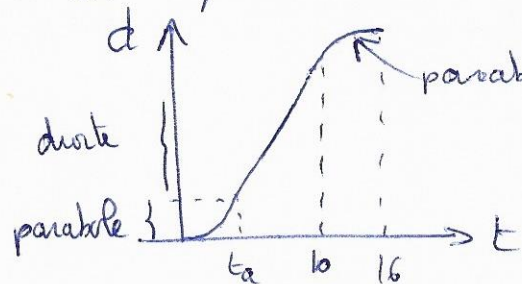
2)



la variat° de vitesse de l'ascenseur entre $t=0$ et $t_f=16$ s vaut par definition de l'acceleration $\int_{t=0}^{t_f} a dt = \text{aire sous la courbe}$

les 2 rectangles ont la m^me aire ($1 \oplus, 1 \ominus$, elles se compensent)
 $\Rightarrow v_{final} = v_{ini} = 0$

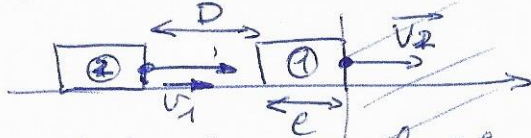
3) Par integration de la 1^{ere} courbe :



(les pentes sont "continues", car ce sont les vitesses, et $v(t)$ est continue)

Distance de sécurité

• A $t=0$, la 1^{ere} voiture arrive dans la zone de freinage :



• L'accident a lieu si la 2^e voiture touche la 1^{ere} en entrant dans la zone :



(cas limite, si 2 n'a pas rattrapé 1 ici, elle ne le fera plus...)

le dessin donne $t_c = \frac{L}{v_2} = \frac{D+L}{v_1} \Rightarrow \left(D = L \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right) = 1,8 \text{ m} \right)$

Avion de chasse

Trajectoire circulaire uniforme $\Rightarrow a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a}$
 $\Rightarrow R = \frac{(2400/3,6)^2}{10 \times 9,8} = 4,5 \text{ km}$

Piéton 1) $\vec{v} = \begin{cases} v \sin \varphi \\ v \cos \varphi \end{cases} \xrightarrow{\text{integ}} \vec{OM} = \begin{cases} v \sin \varphi t \\ v \cos \varphi t \end{cases}$

De même, $\vec{OA_2} = \begin{cases} -D + vL \\ L \end{cases}$

2) $x_M(t_x) = x_{A_2}(t_x) \Rightarrow t_x = \frac{D}{v - v \sin \varphi}$
 $y_M(t_y) = y_{A_2}(t_y) \Rightarrow t_y = \frac{L}{v \cos \varphi}$

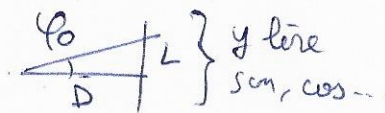
le piéton évite la voiture si $t_x > t_y$. A la limite, $t_x = t_y$:

$$\Rightarrow \left[v = \frac{VL}{D \cos \varphi + L \sin \varphi} \right]$$

3) On choisit φ minimisant $v \Rightarrow \frac{dv}{d\varphi} = 0$. Il suffit de dériver le dénominateur :

$$\frac{dv}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow -D \sin \varphi_0 + L \cos \varphi_0 = 0 \Rightarrow \tan \varphi_0 = \frac{L}{D}$$

$$\text{Alors } v_0 = \frac{VL}{D \cos \varphi_0 + L \sin \varphi_0} = \frac{VL}{\frac{D^2}{\sqrt{L^2 + D^2}} + \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + D^2}}} = \frac{VL}{\sqrt{D^2 + L^2}}$$



Basket Ball

$$1) \vec{a} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\text{int}}{+CI} \\ -g & \end{vmatrix} \vec{v} \begin{vmatrix} V_0 \cos \alpha \\ -gt + V_0 \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$\frac{\text{int}}{+CI} \rightarrow \vec{O\vec{M}} \begin{vmatrix} V_0 \cos \alpha t \\ h - \frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin \alpha t \end{vmatrix}$$

On obtient l'éq de la trajectoire

en éliminant $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \frac{g x^2}{(V_0 \cos \alpha)^2} + x \tan \alpha + \frac{h}{\frac{1}{2} \sin(2\alpha)}$$

$$2) y=0 \text{ est l'éq du } 2^{\text{e}} \text{ degré, } x^2 - \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - \frac{2hV_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 0$$

on prend la racine positive :

$$x_c = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{2hV_0^2 \cos^2 \alpha}{g}}$$

$$z_s \text{ est atteinte quand } \dot{z}_s = 0 \Leftrightarrow -gt_s + V_0 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{V_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{D'où } z_s = h - \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

$$z_s = h + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

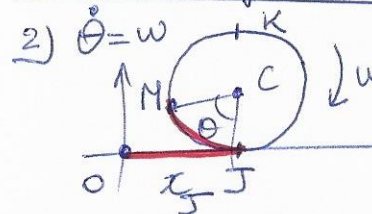
$$3) z_s \text{ est max pour } \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad z_{s \text{ max}} = h + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$4) \text{ Pour } h=0, x_c = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad x_c \text{ max pour } \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{et } x_{c \text{ max}} = \frac{V_0^2}{g}$$

Mouvement cycloidal

1) roue de vélo (sans glissement)



3) Pas de glissement $\Rightarrow$ les longueurs rouges sont égales :

$$x_J = R\theta$$

$$\text{Rz } \vec{O\vec{M}} = \vec{O\vec{J}} + \vec{J\vec{C}} + \vec{C\vec{M}} = \begin{vmatrix} R\theta - R \sin \theta \\ R - R \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$4) \vec{v} = \frac{d\vec{O\vec{M}}}{dt} = \begin{vmatrix} R\omega(1 - \cos \theta) \\ R\omega \sin \theta \end{vmatrix} \quad \text{on a } \vec{MK} = -\vec{CM} + \vec{CK} = \begin{vmatrix} R \sin \theta \\ R \cos \theta + R \end{vmatrix}$$

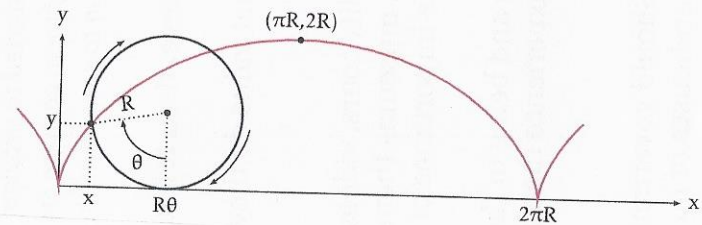
$$\text{D'où } \vec{MK} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \omega \sin^2 \theta - R^2 \omega (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{matrix} \right) \wedge \left(\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{MK} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

5) R est en J pour $\theta = 2\pi$, alors $\vec{v} = \vec{0}$

6)



$$7) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{vmatrix} R\omega^2 \sin \theta \\ R\omega^2 \cos \theta \end{vmatrix}$$

Spirale logarithmique

2) On élimine $t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow \underline{r = b e^{-\theta/\omega r}}$

$$r(\theta_0) = b e^{-\theta_0/\omega r}$$

$$r(\theta_0 + 2\pi) = b e^{-(\theta_0 + 2\pi)/\omega r} = r(\theta_0) e^{-2\pi/\omega r}$$

3) $\ddot{r} = v_{\text{radiale}} = -\frac{b}{r} e^{-t/\tau}$

$$r\ddot{\theta} = v_{\text{thradiale}} = b\omega e^{-t/\tau}$$

$$a_{\text{radiale}} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = b\left(\frac{1}{r^2} - \omega^2\right) e^{-t/\tau}$$

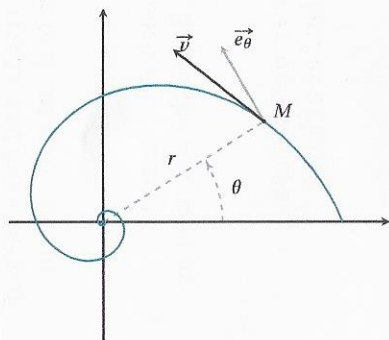
$$a_{\text{thradiale}} = \underbrace{r\ddot{\theta}}_0 + 2\dot{r}\dot{\theta} = -\frac{2b\omega}{r} e^{-t/\tau}$$

4) $v = \sqrt{v_{\text{rad}}^2 + v_{\text{th}}^2} = b\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{r^2}} e^{-t/\tau}$

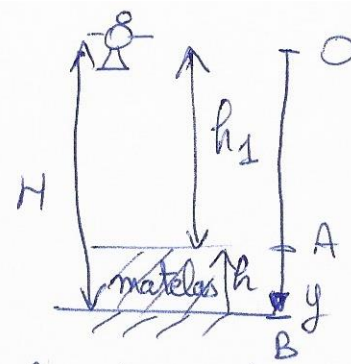
$$a = \sqrt{a_{\text{rad}}^2 + a_{\text{th}}^2} = b\sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{2b\omega}{r}\right)^2} e^{-t/\tau}$$

$$= b\sqrt{\frac{1}{r^4} - \frac{2\omega^2}{r^2} + \omega^4 + \frac{4b^2\omega^2}{r^2}} e^{-t/\tau}$$

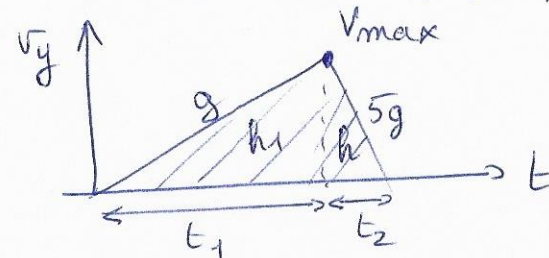
$$= b\left(\frac{1}{r^2} + \omega^2\right) e^{-t/\tau}$$



Free jump



le sauteur accélère (g) entre O et A , puis décélère ($5g$) entre A et B , où il arrive à vitesse nulle (cas limite). Représentation graphique:



$$V_{\text{max}} = gt_1 = 5gt_2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{t_1}{5}$$

On a $h_1 = \int_0^{t_1} v_y dt = \frac{V_{\text{max}} t_1}{2}$

$$h = \int_{t_1}^{t_1+t_2} v_y dt = \frac{V_{\text{max}} t_2}{2} = \frac{V_{\text{max}} t_1}{2 \times 5}$$

D'où $h = \frac{h_1}{5}$, soit $\underline{H = 6h}$.