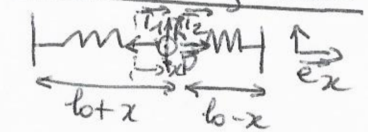
2^{de} Loi de Newton

2 ressorts horizontaux



a) $\vec{T_1} = -k(l_0+x-l_0)\vec{e_x} = -kx\vec{e_x}$

$\vec{T_2} = -k(l_0-x-l_0)(-\vec{e_x}) = -kx\vec{e_x}$

$\vec{P}+\vec{R}=0$

PFD appliqué à M dans Ref Terrestre supposé galiléen (RTSG), en proj sur $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -2kx \Rightarrow \ddot{x}+\omega_0^2 x = 0$ $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{m}}}$

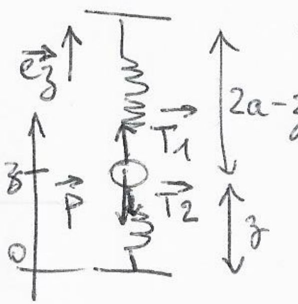
b) $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ c) Sol de l'ESSM (equat° sans second membre) : $x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

CI pour trouver A et B : $x(0) = x_0 = A$, $\dot{x}(0) = \omega_0 B = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ B = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)}$$

2 ressorts verticaux

a) Choisir d'abord 1 axe, 1 origine !



$\vec{T_1} = -k(2a-z-l_0)(-\vec{e_z})$

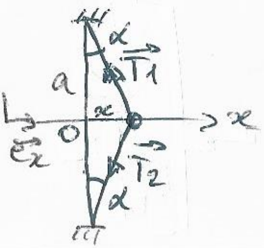
$\vec{T_2} = -k(z-l_0)\vec{e_z}$

PFD appliqué à M ds RTSG, en proj sur $\vec{e_z}$:

A l'équilibre, $-mg + k(2a-z_{eq}-l_0) - k(z_{eq}-l_0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{z_{eq} = \frac{2ka-mg}{2k} = a - \frac{mg}{2k}} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = a+\frac{mg}{2k} \\ l_2 = a-\frac{mg}{2k} \end{cases}$

b) Alors $l_1 \simeq l_2 \simeq a$:



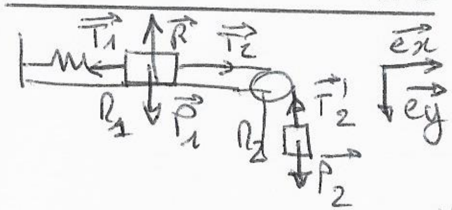
Les 2 projections de T_1 et T_2 sur $\vec{e_x}$ sont égales : $T_{1x} = T_{2x} = -k(l-l_0)\sin\alpha\,\vec{e_x}$, avec $l = \sqrt{a^2+x^2}$, et $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Le PFD donne $m\ddot{x} = -2k\left(\sqrt{a^2+x^2}-l_0\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$m\ddot{x} \simeq -2k\left(1-\frac{l_0}{a}\right)x$ $(x^2 \ll a^2)$

$\Rightarrow$ oscill° de pulsat° $\omega = \sqrt{\frac{2k(1-l_0/a)}{m}}$, $x(t) = x_0\cos\omega t$ (cf ex 1)

Mouvement oscillatoire.



⚠ Exo à 2 masses... Quel système ?

- M_1 seul ? → T_2 inconnue
- $\{M_2+M_1+fil\}$ → élimine T_2, mais il y a des forces à la poulie (pire !)

① On applique le PFD à M_2 pour déterminer $T_2' = T_2$:

en proj sur $\vec{e_y}$: $m'\ddot{y} = m'g - T_2' \Rightarrow T_2' = m'(g-\ddot{y})$

② PFD pour M_1 en proj sur $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -k(x-l_0) + T_2$ (1)

③ Fil inextensible $\Rightarrow \dot{x} = \dot{y}$ (les 2 masses vont à la m̂ vitesse (⚠ orientat° de l'axe !) $\Rightarrow \ddot{x} = \ddot{y}$. Donc

(1) $\Leftrightarrow m\ddot{x} = -k(x-l_0) + m'(g-\ddot{x})$

$\Leftrightarrow (m+m')\ddot{x} + k(x-l_0) = m'g$

$\Leftrightarrow (m+m')\ddot{x} + k\Big(x - \underbrace{\left(l_0+\frac{m'g}{k}\right)}_{x_{eq}}\Big) = 0$

Soit $\ddot{x} + \omega(x-x_{eq}) = 0$, de solution générale

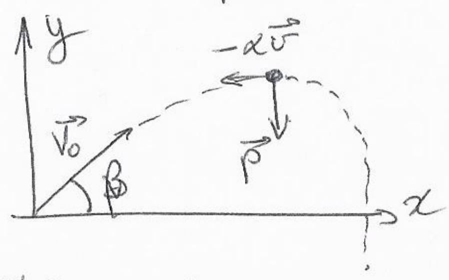
$x - x_{eq} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m+m'}}\right)$

A et B donnés par les CI :

$x_0 - x_{eq} = A$

$\dot{x}_0 = 0 = B\omega \Rightarrow \boxed{x = x_{eq} + (x_0-x_{eq})\cos\omega t}$

Frottement fluide en $\vec v$



1) PFD appliqué à M dans RTSG :

$$m\frac{d\vec v}{dt} = -\alpha\vec v + m\vec g$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec v} + \frac{\vec v}{\tau} = \vec g \quad \text{avec } \boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$$

$\vec v = cste$ à $t \to \infty \Rightarrow \boxed{\vec v_\infty = \tau\vec g} = -\frac{mg}{\alpha}\vec e_3$

2) En projections : $\dot v_x + \frac{v_x}{\tau} = 0 \xrightarrow{int} v_x = Ae^{-t/\tau} \xrightarrow{CI} v_x = v_0\cos\beta\, e^{-t/\tau}$

$$\dot v_y + \frac{v_y}{\tau} = -g \xrightarrow{int} v_y = Ae^{-t/\tau} - g\tau \xrightarrow{CI} v_y = (v_0\sin\beta + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau$$

pour $t \gg \tau$, $\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -g\tau \end{cases}$ chute verticale uniforme

3) On intègre : • $x = -v_0\tau\cos\beta\, e^{-t/\tau} + A \xrightarrow{CI} x = v_0\tau\cos\beta(1-e^{-t/\tau})$

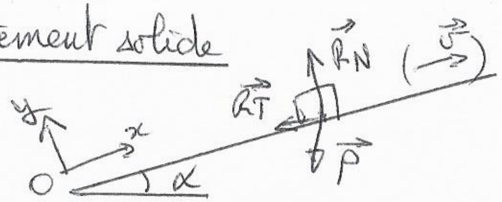
• $y = -g\tau t - (v_0\sin\beta + g\tau)\tau e^{-t/\tau} + B$

$$\xrightarrow{CI} B = (v_0\sin\beta + g\tau)\tau \Rightarrow y = -g\tau t + (v_0\sin\beta + g\tau)\tau(1-e^{-t/\tau})$$

4) y est max si $\dot y = 0 \Leftrightarrow (v_0\sin\beta + g\tau)e^{-t/\tau} = g\tau$

$$\Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{g\tau}{v_0\sin\beta + g\tau}\right) \Leftrightarrow t = \tau\ln\left(1 + \frac{v_0\sin\beta}{g\tau}\right)$$

Frottement solide



Coulomb $\Rightarrow R_T = fR_N$ (car glisst)

1) PFD appliqué à M ds RTSG, en proj sur Ox :

$$m\ddot x = -mg\sin\alpha - fR_N \quad (1)$$

Sur Oy : $0 = -mg\cos\alpha + R_N \Rightarrow R_N = mg\cos\alpha$

(1) $\Leftrightarrow \ddot x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha) \xrightarrow[CI]{int} \dot x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + v_0$

$$\xrightarrow[CI]{int} x = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2 + v_0 t$$

La caisse s'arrête quand $\dot x = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$

$$\Rightarrow D = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} + \frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

2) La caisse peut rester immobile si à l'équilibre, $R_T \le fR_N$. A l'éq, le PFD donne :

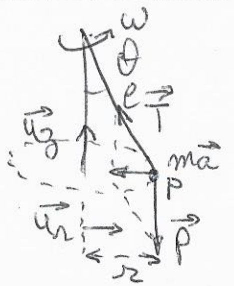
$$\begin{cases} 0 = -mg\sin\alpha + R_T \Rightarrow R_T = mg\sin\alpha \\ 0 = mg\cos\alpha + R_N \Rightarrow R_N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_T \le fR_N \Leftrightarrow \boxed{\tan\alpha \le f}$$

Sinon la caisse redescend en MR accéléré

Pendule conique

1) P est en mvt circulaire uniforme



$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 r \vec{u_r}$ (⚠ axes !)

or $r = \ell \sin\theta$

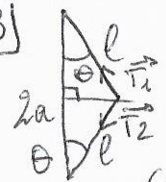
le PFD appliqué à P dans RTSG donne :

- selon $\vec{u_z}$: $0 = T\cos\theta - mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$
- selon $\vec{u_r}$: $-m\omega^2 \ell\sin\theta = -T\sin\theta$ (2)

(2) $\Rightarrow m\omega^2\ell = \frac{mg}{\cos\theta} \Leftrightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{g}{\ell\omega^2}}$

2) Ceci n'est possible que si $\cos\theta \leq 1 \Leftrightarrow \omega \geq \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

3)



géométriquement, si le 2ᵉ fil est juste tendu, on a $\cos\theta = \frac{a}{\ell} = \frac{g}{\ell\omega_1^2} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}}}$

(la formule du 1 est valable, car à ω_1, $T_2 = 0$)

4) le PFD projeté donne : en $\vec{u_z}$: $0 = -mg - T_2\cos\theta + T_1\cos\theta$

en $\vec{u_r}$: $-m\omega^2\ell\sin\theta = -(T_1+T_2)\sin\theta$

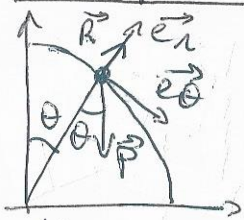
$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 - T_2 = \frac{mg}{\cos\theta} = \cancel{\frac{mg\,\ell\omega_1^2}{g}} = m\ell\omega_1^2 \ (1) \\ T_1 + T_2 = m\omega^2\ell \ (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)+(2) : & T_1 = \frac{1}{2} m\ell(\omega_1^2 + \omega^2) \\ (2)-(1) : & T_2 = \frac{1}{2} m\ell(\omega^2 - \omega_1^2) \end{cases}$$

On a $T_1 = 2T_2 \Leftrightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_2^2 - 2\omega_1^2 \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_1}$

pour $\omega = \omega_2$

Décollage d'un surfeur



1) a) 2ᵉ LN appliquée à M ds RTSG

- selon $\vec{e_r}$: $m(\underbrace{\ddot{R}}_{0} - R\dot{\theta}^2) = R - mg\cos\theta$ (1)
- selon $\vec{e_\theta}$: $m(R\ddot{\theta} + \underbrace{2\dot{R}\dot{\theta}}_{0}) = mg\sin\theta$ (2)

b) (2) $\times \dot{\theta}$: $\cancel{m}R\underbrace{\ddot{\theta}\dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2)} = \cancel{m}g\underbrace{\sin\theta\,\dot{\theta}}_{\frac{d}{dt}(-\cos\theta)}$, on intègre entre 0 et t :

$$\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = \left[-\frac{g}{R}\cos\theta\right]_{\theta_0}^{\theta}$$ ⚠ Bornes !

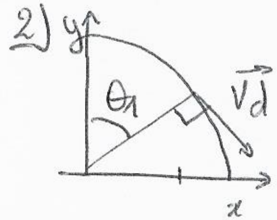
soit $\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$

c) On remplace dans (1) : $R = m(g\cos\theta - R\overbrace{\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}^{\dot{\theta}^2})$

$\boxed{R = mg(3\cos\theta - 2)}$

M quitte la sphère si $R = 0 \Leftrightarrow \boxed{\theta_1 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)}$

2)



$\vec{V_d}$ est portée par $\vec{u_\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1\end{pmatrix}$,

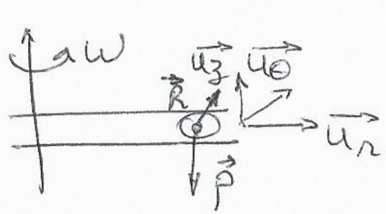
Sa norme vaut $R\dot{\theta}_1 = R\sqrt{\frac{2g}{R}(1-\cos\theta_1)}$

$= \sqrt{2gR\left(1-\frac{2}{3}\right)}$

$= \sqrt{\frac{2gR}{3}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{V_d} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1\end{pmatrix}}$

Bille dans un tube en rotation



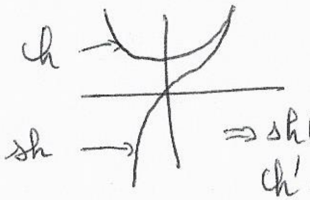
1) ⚠ $\vec{R}$ a a priori 2 composantes selon $\vec{u_z}$ et $\vec{u_\theta}$ (pas selon $\vec{u_r}$ car pas de frott)

PFD appliqué à M dans RTSG, repère cylindrique :

$$m\begin{vmatrix} \ddot{r}-r\omega^2 \\ \cancel{r\dot{\omega}}+2\dot{r}\omega \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & (1) \\ R_\theta & (2) \\ R_z & (3) \end{vmatrix}$$

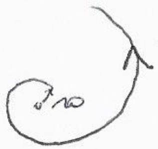
$(1) \Rightarrow \ddot{r}-\omega^2 r=0 \xrightarrow{\text{integ}} r = A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t$

$\xrightarrow{\text{CI}} \boxed{r = r_0\,\mathrm{ch}\,\omega t}$



$\Rightarrow \mathrm{sh}(0)=0$

$\mathrm{ch}'(0)=0$

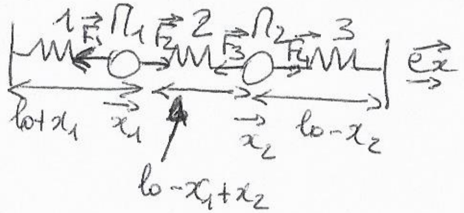


2) Spirale ≈ logarithmique :

3) $(2) \Rightarrow \begin{cases} R_\theta = 2m\dot{r}\omega = 2m\omega^2 r_0\,\mathrm{sh}\,\omega t \\ R_z = mg \end{cases}$

Modes propres de 2 oscillateurs couplés

1)



1 est étiré de x_1
3 " $-x_2$
2 " x_2-x_1

Ω1 subit $\vec F_1 = -k_1 x_1 \vec e_x$
$\vec F_2 = k_2(x_2-x_1)\vec e_x$

Ω2 subit $\vec F_3 = -k_2(x_2-x_1)\vec e_x$
$\vec F_4 = -k_1 x_2 \vec e_x$

(Prendre "dans sa tête" $x_1=0$, ou $x_2=0$ pour vérifier les signes des tensions avec votre bon sens)

2) • $m\ddot x_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2-x_1)$ (PFD pour Ω1)

⇔ $m\ddot x_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$ (1)

• $m\ddot x_2 = -k_1 x_2 - k_2(x_2-x_1)$ (PFD pour Ω2)

⇔ $m\ddot x_2 + (k_1+k_2)x_2 - k_2 x_1 = 0$ (2)

3) (1)+(2) ⇒ $m(\ddot x_1+\ddot x_2) + k_1(x_1+x_2) = 0$

⇔ $\boxed{\ddot u + \frac{k_1}{m}u = 0}$ (3) ($u = x_1+x_2$)

(1)-(2) ⇒ $m(\ddot x_1-\ddot x_2) + (k_1+2k_2)(x_1-x_2) = 0$

⇔ $\boxed{\ddot v + \frac{k_1+2k_2}{m}v = 0}$ (4)

4) a) Alors $\begin{cases} u(0)=0 \\ v(0)=2a \end{cases}$ $\dot u(0)=\dot v(0)=0$

(3) a pour solut° générale $u = A\cos\omega_S t + B\sin\omega_S t$

Avec les CI, $\boxed{u=0}$. ($A=B=0$)

De m̂ $v(t) = A'\cos\omega_A t + B'\cos\omega_B t$

Avec les CI, $\boxed{v = 2a\cos\omega_A t}$.

Donc $\begin{cases} x_1 = \frac{u+v}{2} = a\cos\omega_A t \\ x_2 = \frac{u-v}{2} = -a\cos\omega_A t \end{cases}$ $x_2(t) = -x_1(t)$

5) alors $u(0) = 2a$ $\dot u(0) = \dot v(0) = 0$
$v(0) = 0$

On trouve de m̂ : $u = 2b\cos\omega_S t$

⇒ $\begin{cases} x_1 = b\cos\omega_S t \\ x_2 = x_1 \end{cases}$

les 2 masses se déplacent "en bloc" ⇒ le 2e ressort a 1 longueur l_0 = cste ⇒ pas de k_2 dans ω_S