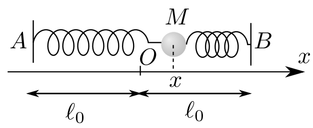
Seconde loi de Newton

Méthodes de résolution

Les exercices ou questions marqués * seront à reprendre par une méthode énergétique au chapitre suivant... Laquelle est la plus efficace ?

1 Point matériel lié à deux ressorts horizontaux *

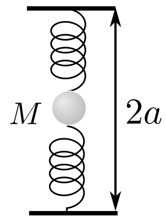
Un point matériel M (masse m) est attaché à deux ressorts horizontaux identiques (longueur au repos ℓ_0, constante de raideur k) fixés aux points A et B.
Le point M, de position $\overline{OM} = x$ à l'instant t glisse sans frottement le long de l'axe Ox. Les points A et B sont fixes.
a) Établir l'équation différentielle du mouvement du point M.
b) Quelle est la période T des oscillations du point M ?
c) À l'instant $t = 0$, le point matériel situé en M_0, tel que $\overline{OM_0} = x_0$, est relâché avec une vitesse initiale nulle. Exprimer x en fonction de t.



Rép : $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$ avec $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$

2 Point matériel fixé à deux ressorts verticaux *

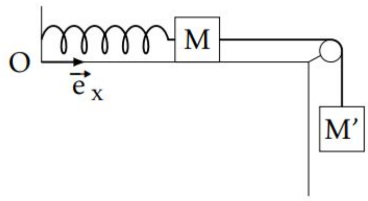
Un point matériel M (masse m) est fixé à 2 ressorts verticaux identiques (longueur au repos ℓ_0, raideur k).
a) Calculer à l'équilibre les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des ressorts en fonction de m, g, k, a
b) On se place dans cette question dans la condition $mg \ll ka$. En déduire ℓ_1 et ℓ_2.
On considère maintenant des petits déplacements horizontaux de $M(x \ll a)$, à partir de la position d'équilibre. Exprimer x en fonction de t sachant que $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.



Rép : $l_{1/2} = a \pm \dfrac{mg}{2k}$, oscillations à $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k(1 - \ell_0/a)}{m}}$

3 Mouvement oscillatoire *

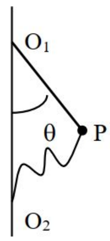
Un point matériel M de masse m est attaché à un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. En outre M est relié par un fil inextensible (de masse négligeable) à un point matériel M′ de masse m'. Le fil glisse sans frottements sur une poulie et M glisse sans frottements sur le plan horizontal. A $t = 0$, on lâche M d'une position x_0 sans vitesse initiale.
Établir l'équation du mouvement de M et la résoudre.



Rép : Appliquer le PFD à M' puis M, utiliser que le fil est inextensible ; $x = x_{eq} + (x_0 - x_{eq}) \cos \omega t$, avec $\omega = \sqrt{k/(m + m')}$ et $x_{eq} = \ell_0 + m'g/k$

4 Pendule conique *

Un point P, de masse m, est attaché par deux fils inextensibles en O_1 et O_2, distants de 2a. La barre O_1O_2 tourne à la vitesse angulaire ω constante, l'angle θ est alors constant. Les deux fils ont pour longueur ℓ.
1) Le fil inférieur n'étant pas tendu, déterminer la relation entre θ et ω.
2) Pour quelle valeur minimale ω_0 de ω, le fil s'écarte-t-il de l'axe ?
3) Pour quelle valeur minimale ω_1 de ω, le fil inférieur se tend-il ?
4) Pour une vitesse angulaire $\omega > \omega_1$, calculer les tensions des deux fils en fonction de m, ω et ω_1. En déduire ω_2 pour laquelle la tension du fil supérieur est double de l'autre.



Rép : $\cos \theta = \dfrac{g}{\ell \omega^2}; \omega_0 = \sqrt{g/\ell}; \omega_1 = \sqrt{g/a}; T_1 = \frac{1}{2} m\ell(\omega^2 + \omega_1^2), T_2 = \frac{1}{2} m\ell(\omega^2 - \omega_1^2), \omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$

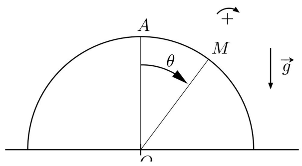
5 Frottement fluide en $\vec{v}$

On considère un point matériel M de masse m. Il est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle β avec l'horizontale dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. On considère de plus qu'il est soumis à une force de frottement fluide dont on peut modéliser l'action par : $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$, avec $\alpha \geqslant 0$ (il faut pour cela que le fluide soit très visqueux par exemple).
1. Identifier un temps τ et une vitesse v_∞ caractéristiques du problème.
2. Déterminer les composantes horizontale et verticale de la vitesse. Quel est la nature du mouvement pour $t \gg \tau$.
3. Déterminer l'évolution temporelle des coordonnées horizontale et verticale de M. Représenter l'allure de la trajectoire.
4. Déterminer l'expression du temps t_m correspondant à l'altitude maximale y_m atteinte.

Rép : $\tau = m/\alpha; \dot{x} = v_0 \cos\beta e^{-t/\tau}; \dot{y} = -g\tau + (v_0 \sin\beta + g\tau)e^{-t/\tau}; x = v_0\tau\cos\beta(1-e^{-t/\tau}); y = -g\tau t + \tau(v_0\sin\beta + g\tau)(1-e^{-t/\tau}); t_m = \tau\ln(1+v_0\sin\beta/g\tau)$

6 Décollage d'un support *

Un point M assimilable à un point matériel de masse m est posé au sommet d'un support assimilé à une demi-sphère de rayon R (bol renversé, igloo...). A l'instant t = 0, il se met à glisser, sans vitesse initiale, le long de la paroi.



1. On définit, à l'instant t l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. On suppose dans un premier temps que l'objet reste au contact de la sphère
a) Écrire dans un repère judicieusement choisi la relation fondamentale de la dynamique.
b) En multipliant l'une des équations par $\dot{\theta}$,En déduire que : $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$
c) En déduire l'expression de la réaction R. Montrer qu'alors le point M quitte la sphère pour un angle θ_1. Quelle est la nature du mouvement ultérieur ?
5/ Déterminer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, en fonction de R et g, la vitesse du point M, notée $\vec{v}_d$, lorsqu'il quitte le support.

Rép : $R = mg(3\cos\theta - 2), \theta_1 = \arccos(2/3); \vec{v}_1 = \sqrt{2gR/3}(\cos\theta_1\vec{e}_x - \sin\theta_1\vec{e}_y)$

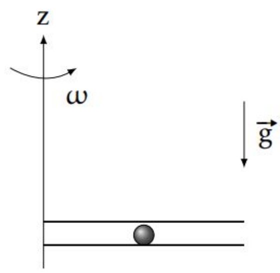
7 Frottement solide

On lance vers le haut une caisse de masse m selon l'axe Ox de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il existe un frottement solide de coefficient f.
1. Appliquer le principe fondamental en projection pour déterminer la réaction normale au plan, en déduire la réaction tangentielle puis l'équation différentielle du mouvement. En déduire $x(t)$ si , à $t = 0, x = 0$ et $\dot{x} = v_0$, ainsi que la distance D parcourue par la caisse avant qu'elle ne s'arrête.
2. A quelle condition sur f et α la caisse peut par la suite demeurer immobile ?
Décrire le mouvement ultérieur de la caisse si cette condition n'est pas vérifiée.

Rép : $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2(f\cos\alpha + \sin\alpha) + v_0 t; D = \dfrac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha + \sin\alpha)}$; immobilité si $\tan\alpha \leqslant f$

8 Bille dans un tube en rotation

On étudie le mouvement d'une bille astreinte à se déplacer à l'intérieur d'un tube creux. Ce tube tourne à vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal autour d'un axe fixe vertical.
La bille de masse m est assimilée à un point matériel M. Elle est lâchée, à l'instant $t = 0$ d'une distance r_0 de l'axe de rotation et sans vitesse initiale par rapport au tube. On néglige les frottements et on étudie le mouvement dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

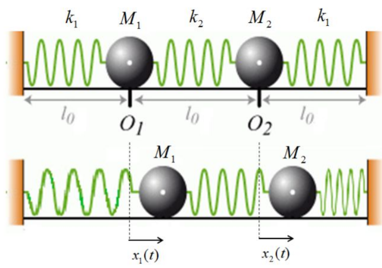


1/ Déterminer l'équation du mouvement et l'intégrer.
2/ Dessiner l'allure de la trajectoire de la bille.
3/ Déterminer l'expression de la force exercée par le tube sur la bille en fonction de temps.

Rép : $\ddot{r} - \omega^2 r = 0; r = r_0\cosh\omega t; R_r = 0, R_\theta = 2mr_0\omega^2\sinh\omega t, R_z = mg$

9 Modes propres de deux oscillateurs couplés

M_1 et M_2, de même masse m, sont reliées à 3 ressorts de raideurs k_1, k_2 et k_1. Lorsque les masses sont au repos, aux points O_1 et O_2, les 3 ressorts ont une longueur l_0 (schéma du haut).
On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ l'abscisse des deux masses, repérées par rapport à leur position d'équilibre (schéma du bas).



1) Établir le bilan des forces subies par chacune des deux masses.
2) Établir le système d'équations différentielles couplées vérifiées par x_1 et x_2. (L'équation différentielle vérifiée par x_1 doit faire intervenir x_2, et réciproquement).
On pose $u(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $v(t) = x_1(t) - x_2(t)$.
3) En additionnant/soustrayant montrer que u et v vérifient $\begin{cases} \ddot{u} + \dfrac{k_1}{m}u = 0 \\ \ddot{v} + \dfrac{k_1 + 2k_2}{m}v = 0 \end{cases}$

On pose $\omega_S = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ et $\omega_A = \sqrt{\frac{k_1+2k_2}{m}}$.
4) À $t = 0$, on déplace les deux masses d'une abscisse $x_1(0) = a > 0$ et $x_2(0) = -a$ et on les lâche simultanément sans vitesse.
a) Donner les valeurs initiales $u(0), v(0), \dot{u}(0)$ et $\dot{v}(0)$. Résoudre les deux équations différentielles et exprimer $u(t)$ et $v(t)$ en fonction de a, ω_S et ω_A.
b) En utilisant l'expression de $u(t)$ obtenue précédemment, exprimer x_2 en fonction de x_1. Quel est dans ce cas le mouvement des deux masses l'une par rapport à l'autre ? Un tel comportement est appelé mode anti-symétrique. Expliquer physiquement pourquoi on obtient une telle expression pour ω_A.
5) Reprendre la quastion précédente si à l'instant initial, on déplace les deux masses d'une abscisse $x_1(0) = x_2(0) = b > 0$ et on les lâche simultanément sans vitesse.