Oscillateurs mécaniques

Ce chapitre, qui est très proche de ceux traitant des oscillations électriques, sera l'occasion de quelques révisions sous forme d'exercices et mettra en évidence analogies et différences entre ces deux systèmes.

I. Mises en équation

1. Oscillateur libre amorti

On considère un point matériel M de masse m, attaché à un ressort de raideur k, longueur à vide ℓ_0, soumis à un frottement fluide dans l'air proportionnel à la vitesse $\vec{f} = -h\vec{v}$

a. ressort horizontal

1/ Faire un dessin (forces, repère, origine(s)...)
2/ Écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de M sous la forme canonique, préciser les expressions de ω_0 et Q

b. ressort vertical

Mêmes questions. On prendra l'axe vertical orienté vers le haut.

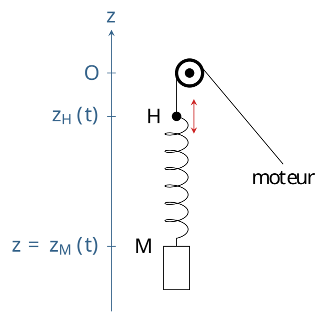
2. Analogie electricité/mécanique

Retrouver l'équation du RLC série en régime libre puis compléter le tableau suivant :

Système mécanique	x	$v = \dot{x}$	m	k	h	F
RLC série						

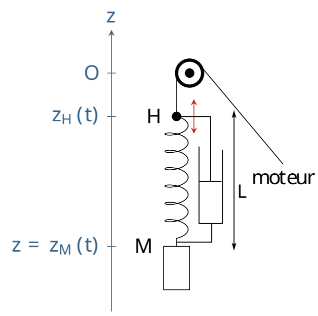
3. Oscillateur forcé vertical

a. Amortissement par le milieu extérieur



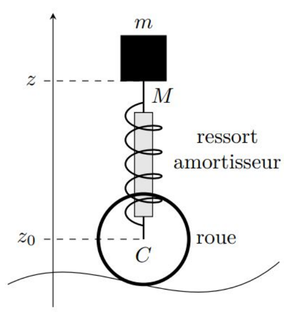
Le point d'attache du ressort H est mis en mouvement par un dispositif qui lui impose un déplacement $z_H(t)$ (voir ci-contre). M est soumis à un frottement fluide dans l'air proportionnel à sa vitesse $\vec{f} = -h\vec{v}$ par rapport à l'air.
Comment se modifient les résultats précédents ? Donner l'équation différentielle du mouvement.

b. Amortisseur embarqué



M est maintenant attaché à un amortisseur, la force de frottement fait intervenir la vitesse relative des deux parties de l'amortisseur, $f = -h\dot{L}$
Comment se modifient les résultats précédents ? Donner l'équation différentielle du mouvement.

II. Exemple de réinvestissement des réflexes acquis en électricité : Suspension d'un VTT(d'après centrale)



Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT. Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M, posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte.
La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_0 sur un axe vertical Oz ascendant tel que $z_0 = 0$ corresponde à la position moyenne du chemin.

Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α. L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force

$$\vec{F}_{\rm a} = -\alpha\,(v_z - v_{z0})\,\vec{u}_z$$

où $v_z = \dot{z}$ et $v_0 = \dot{z}_0$ sont les vitesses verticales respectives de M et C. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

1 - Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_0 = 0$, et la cote z est constante, de valeur $z_{\rm e}$, en régime dit stabilisé. Déterminer $z_{\rm e}$ en fonction de m, g, k et L_0.

2 - Considérons maintenant le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. On pose $Z(t) = z(t) - z_{\rm e}$. Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction à déterminer, dépendant de z_0, de v_0 et des constantes α et k caractéristiques de la suspension. Préciser le sens physique de F.

3 - On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude $F_{\rm m}$ et de pulsation ω.

3.a - Pourquoi ne perd-on pas en généralité en faisant cette hypothèse ?

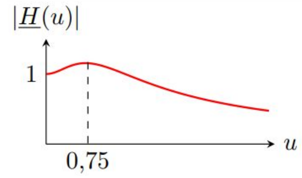
3.b - Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale du VTT est également sinusoïdale de même pulsation que F. Cacluler son amplitude $V_{\rm m}$ en fonction de $F_{\rm m}$.

4 - La fonction de transfert de la suspension est définie par $\underline{H} = \underline{Z}/\underline{z_0}$, et on introduit les paramètres adimensionnés

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Que représente physiquement $\underline{H}$? Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u.

Pour un VTT se déplaçant à la vitesse (horizontale !) V sur un chemin fait de cailloux de taille typique ℓ, le spectre d'excitation est maximal autour de $\omega = 2\pi V/\ell$. La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$.



5 - Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.

1 Utilisation du décrément logarithmique

On réalise expérimentalement le dispositif suivant : un objet (assimilé à un point matériel M) de masse m est attaché à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_o et posé sur un rail à coussin d'air horizontal (en fonctionnement) : de ce fait il n'y a pas de frottements entre le rail et l'objet. On note ℓ la distance OM et $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ «l'abscisse de M comptée à partir de sa position d'équilibre». Une voile (non représentée sur le schéma ci-contre) a été placée au-dessus de la masse : elle exerce sur la masse une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse de M et h une constante positive.

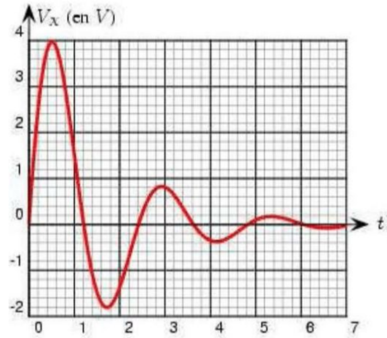
1. Montrer que $x(t)$ est solution d'une équation différentielle qu'on présentera sous la forme $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$ où ξ et ω_n sont des constantes à déterminer en fonction de h, k et m.

2.1. Quelle inégalité doit vérifier ξ pour que l'on obtienne un régime pseudo-périodique ? On supposera dans la suite de l'exercice que cette inégalité est vérifiée.

2.2. Sachant que l'objet est lancé avec la vitesse $\vec{v}(t=0) = {\rm v}_0 \cdot \overrightarrow{u_x}$ de la position $x(0) = 0$, déterminer l'expression de $x(t)$. On introduira la pseudo-pulsation Ω.

2.3. On définit le décrément logarithmique δ par la quantité $\delta = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t+nT)}\right)$ où T est la pseudo-période, n un entier et t le temps. Exprimer δ en fonction de ξ.

2.4. La masse m de l'objet est connue : $m = 0,50$ kg. Un dispositif permet d'enregistrer le mouvement de l'objet : un transducteur fournit à ses bornes la tension $V_X = k \cdot x(t)$ où $k = 1,0\ \mathrm{V{\cdot}cm^{-1}}$. Le transducteur est connecté aux bornes d'un oscilloscope. L'oscillogramme obtenu est représenté ci-contre : (échelles : 1V/div en ordonnée et 1s/div en abscisse)
En déduire la pseudo-période T , la constante ξ , la constante de raideur k du ressort.



2 Bande passante de la réponse en vitesse

Une petite sphère de masse m est suspendue à l'extrémité inférieure M d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Cette sphère plonge dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η. Lorsqu'elle se déplace à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au fluide, ce dernier exerce la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, pour des vitesses faibles.

À $t = 0$, l'extrémité supérieur A du ressort est soumise à un déplacement de la forme : $x_A(t) = X_A\cos(\omega t)$.

1.Établir l'équation différentielle du mouvement de M.

2. Déterminer l'amplitude de la vitesse $V_m(\omega)$ en fonction de ω.

3. On appelle bande passante (à $3dB$) la bande de fréquence $\Delta f = (f_2 - f_1)$ à l'intérieur de laquelle l'amplitude de la vitesse $V_m(\omega)$ satisfait à l'inégalité $V_m(\omega) \geqslant \frac{V_r}{\sqrt{2}}$, où V_r est l'amplitude de la vitesse à la résonance.
Calculer Δf.