Énergie en mécanique

A savoir et savoir faire

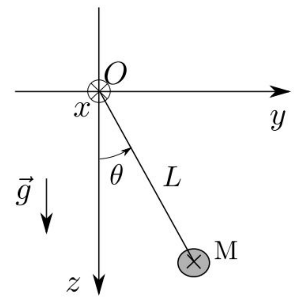
- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
- Définir et calculer la puissance et le travail d'une force.
- Établir l'équation du mouvement ou calculer le travail d'une force à partir des lois de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen.
- Choisir la loi appropriée en fonction du contexte.
- Distinguer force conservative et force non-conservative. Donner un exemple de chaque.
- Énoncer le théorème de l'énergie cinétique ? (donner la forme intégrale et la forme instantanée)
- Savoir établir et exploiter les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.
- Exprimer la force $\vec{F}$ en fonction de l'énergie potentielle $E_p(x)$ associée
- Énoncer le théorème de l'énergie mécanique
- Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique et utiliser les conditions initiales pour la déterminer.
- Établir l'équation d'un mouvement conservatif à partir de l'énergie mécanique.
- Déduire d'une courbe d'énergie potentielle le comportement qualitatif d'un système dont on connaît l'énergie mécanique : trajectoire bornée ou non, éventuel mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
- Déduire d'une courbe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité.
- Exploiter qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase.
- Approximer un puits de potentiel quelconque par un puits harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable, y démontrer des oscillations sinusoïdales.

EC1 - Application du TEM sur le cas de la chute libre

On considère une masse m en chute libre sans vitesse initiale dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme. On néglige tout frottement et le référentiel d'étude est galiléen. On utilise un axe z orienté vers le bas, avec $z = 0$ initialement.
1 - Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de la masse en fonction notamment de z.
2 - En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse de la masse après une chute d'une hauteur h.

EC2 - Application du TEM sur le cas du pendule simple

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable, on note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g \simeq 10$ m/s^2 constante.



1 - Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse m en fonction des coordonnées polaires du point M.
2 - Faire de même pour l'énergie potentielle de pesanteur du point M.
3 - Que peut-on dire du travail de la force de tension du fil ?
4 - En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, trouver une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une quantité comprenant $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ qui reste constante tout au long du mouvement.
5 - En déduire l'équation du mouvement, qui porte sur $\ddot{\theta}$ et θ.

I. Puissance et travail d'une force

1. Puissance d'une force

Définition : puissance d'une force

Soit un point matériel M de vitesse $\vec{v}$, soumis à une force $\vec{F}$.
La puissance de la force $\vec{F}$ est le produit scalaire $\boxed{\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}}$, en watt.

Ce sont des joules par seconde : la puissance donne donc le rythme auquel l'énergie est reçue par le système. Si $\mathcal{P} < 0$, c'est que l'énergie n'est en fait pas reçue, mais produite par le système.
Remarque : La vitesse dépend du référentiel d'étude, donc la puissance également.

- Si $\begin{cases}\mathcal{P} > 0\\ \mathcal{P} < 0\end{cases}$, la force est $\begin{cases}\text{motrice}\\ \text{résistante}\end{cases}$: elle a tendance à $\begin{cases}\text{augmenter}\\ \text{diminuer}\end{cases}$ la norme de la vitesse.

2. Travail d'une force

a. Travail élémentaire

Définition : Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ agissant pendant dt est $\boxed{\delta W = \mathcal{P}\mathrm{d}t}$

Remarque importante sur les notations pour les infiniments petits

• La notation différentielle $\mathrm{d}f$ indique une différence de la fonction f évaluée entre deux instants très proches ou deux points très proches.
Par exemple le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$. est bien la différence du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ entre deux instants très proches : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$.
• La notation δ est utilisée pour les cas où la quantité infinitésimale ne peut pas être vue comme la différence d'une fonction entre deux instants ou deux points. Ainsi, le travail élémentaire caractérise un échange d'énergie du système avec l'extérieur par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$. C'est une grandeur d'échange qui n'existe ni à l'instant t ni à l'instant $t+\mathrm{d}t$ mais seulement au cours du déplacement entre t et $t+\mathrm{d}t$.

On peut réécrire le travail élémentaire en fonction du déplacement élémentaire :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}\ \mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}}$$

b. Travail d'une force le long d'un déplacement entre deux points A et B

Le travail de la force $\vec{F}$ correspond à la somme des travaux élémentaires calculés sur la trajectoire AB :

$$W_{A\to B} = \int_{M\in AB} \delta W$$

Deux expressions du travail d'une force

- En temps, $\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t$, d'où $W_{A\to B}(\vec{f}) = \displaystyle\int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t$.
- En espace, $\delta W(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, d'où $W_{A\to B}(\vec{f}) = \displaystyle\int_{M\in AB} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Attention, l'intégrale est curviligne, elle s'effectue **sur la trajectoire effectivement suivie**.

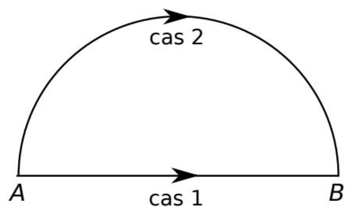
Remarque : Le travail (élémentaire ou non) dépend du référentiel, car la trajectoire du point M en dépend.

3. Exemples de calculs de travaux

- force constamment perpendiculaire au mouvement :

- force constante **(vectoriellement !)** :

En particulier $W_{AA}(\vec{F}) = 0$, le travail sur une trajectoire partant de A et revenant en A est nul. Une telle force est dite **conservative**.
- force de frottement de norme constante f :



Le travail sur une trajectoire fermée partant de A et revenant en A est strictement négatif.
Une telle force est une force dissipative.

II. Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique

1. Énoncés

Définition : énergie cinétique

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse v (en norme). Son énergie cinétique est définie par $E = \frac{1}{2}mv^2$

Remarque : la vitesse dépend du référentiel, donc l'énergie cinétique également.

Théorème de la puissance cinétique : version instantanée

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M, d'énergie cinétique E_c et soumis à une somme de forces que l'on note $\sum\vec{F}$ et dont la somme des puissances associées est $\sum\mathcal{P}(\vec{F})$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum\mathcal{P}(\vec{F})$$

Théorème de l'énergie cinétique : version intégrale

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M, allant d'un point A à un point B. Alors sa variation d'énergie cinétique entre A et B est égale au travail de toutes les forces qui s'exercent sur le point :

$$E_{c,B} - E_{c,A} = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

Démonstrations : Considérons ans un référentiel galiléen M de masse m, soumis à un ensemble de forces que l'on note $\sum \vec{F}$. On applique le PFD au système masse m : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$. On en prend le produit scalaire par la vitesse $\vec{v}$:

$$m\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \sum \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum \vec{v} \cdot \vec{F} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}).$$

Pour arriver à la version intégrale on l'intègre le long de la trajectoire du point A au point B :

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_A^B \sum \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t = \sum \int_A^B \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t = \sum W_{AB}(\vec{F}) = Ec_B - Ec_A.$$

2. Intérêt d'une approche énergétique

Le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence du PFD et n'introduit pas de nouveau postulat. Par contre, le PFD fournit (et impose...) trois équations, le TEC une seule :

Quand privilégier le TEC ?

Une méthode énergétique est adaptée aux cas où un seul paramètre de position suffit à décrire l'évolution du système.

⇒ Reprendre les exos du TD PFD qui s'y prêtent et comparer !

III. Force conservative et énergie potentielle

1. Définitions

Force conservative (définition 1)

Une force est conservative si son travail le long d'une trajectoire AB ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B.

a. Énergie potentielle

On peut alors écrire le travail $W_{A\to B}$ comme une différence $E_p(A) - E_p(B)$ (et pas $E_p(B) - E_p(A)$) où Ep est une fonction de la variable de position. Au niveau élémentaire, la relation devient :

$$\delta W = -dE_p \qquad \text{(Ne pas oublier le moins !)}$$

On appelle alors énergie potentielle de la force cette fonction Ep.

Énergie potentielle

Une force est dite conservative si on peut trouver une fonction énergie potentielle E_p telle que

$$\delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = -dE_p$$

On dit alors que la force $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle E_p.

Remarque importante : L'énergie potentielle est définie à partir de sa variation, elle n'est donc déterminée qu'à une constante près : si E_p est une énergie potentielle possible, $Ep + K$ où K est une constante est également une énergie potentielle possible. On peut donc **choisir** une position arbitraire O pour laquelle Ep(0) = 0. Le point O est alors le point de référence de l'énergie potentielle.
⇒ Ne pas oublier de préciser votre choix dans un exercice, et s'y tenir !

2. Exemples de forces conservatives, calculs d'énergie potentielle - A savoir et savoir refaire

Méthode : $\begin{cases} \text{- Choisir un repère adapté} \\ \text{- y écrire } \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM}\text{, avec } \overrightarrow{dOM} \text{ déplacement élémentaire en cartésiennes/cylindriques/sphériques} \\ \text{- faire apparaitre une différentielle.} \end{cases}$

• Poids d'un corps :

• Force exercée par un champ électrique uniforme

• Force gravitationnelle exercée par un astre ponctuel

• Force électrique exercée par une charge ponctuelle

• Force de rappel d'un élastique d'un ressort

IV. Théorème de l'énergie mécanique

a. Définitions

Définition : énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel M est la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle de toutes les forces conservatives auxquelles il est soumis :

$$E_m = E_c + E_p$$

b. Le théorème

Il est nécessaire de distinguer les forces conservatives notées $\overrightarrow{f_c}$ de celles qui ne le sont pas que l'on notera $\overrightarrow{f_{Nc}}$. En notant leurs travaux respectifs W_c et W_{Nc}, on peut écrire le TEC :

$$dE_c = \delta W = \delta W_c + \delta W_{Nc} \text{ avec } \delta W_c = -dE_p$$

Donc :

$$dE_p + dE_c = \delta W_{Nc}$$
$$\Leftrightarrow dE_m = \delta W_{Nc}$$

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M, allant d'un point A à un point B. Alors sa variation d'énergie mécanique entre A et B est égale au travail de toutes les forces non conservatives qui s'exercent sur le point :

$$E_{m,B} - E_{m,A} = \sum W_{AB,\mathrm{nc}}(\vec{F})$$

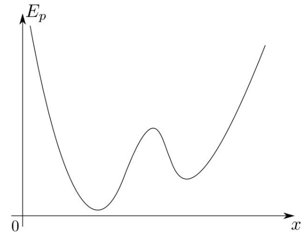
- Il s'agit donc simplement d'une reformulation du théorème de l'énergie cinétique
- Attention, seules les forces non conservatives interviennent dans les travaux à droite. Les forces conservatives sont prises en compte dans E_m via leurs énergies potentielles.
- **Cas particulier important :** Si toutes les forces sont conservatives ou ne travaillent pas, alors $\Delta E_m = 0$: l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

C'est souvent le cas lorsqu'on néglige tout type de frottements. On comprend le vocabulaire : une force conservative "conserve" l'énergie mécanique. On parle alors de mouvement conservatif.
Exemples d'applications EC1 : chute libre. EC2 : pendule simple.

V. Mouvement conservatif à un degré de liberté

Dans toute cette partie on considère :
- un point matériel M soumis seulement à des forces conservatives, qui dérivent d'une énergie potentielle totale E_p ;
- une situation à un degré de liberté, par exemple un mouvement selon un axe x et donc une énergie potentielle $E_p(x)$ (graphe ci-contre) ;
- on note $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ la force totale (somme des forces) s'exerçant sur M et dérivant de E_p.

On peut imaginer qu'on décrit l'évolution d'un mobile glissant sans frottement sur une surface courbe dont la hauteur $z = z(x)$ correspond à $E_p(x) = mgz(x)$. Mais la situation décrite est bien plus générale.



1. Type de trajectoire et positions de vitesse nulle

Que peut-on dire de E_m ?

On peut la tracer sur le graphe d'énergie potentielle ci-dessus.

Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (1)

- Les conditions initiales déterminent la valeur (constante) de E_m, que l'on trace sur le graphe de $E_p(x)$.
- Les mouvements possibles vérifient $E_p(x) \leqslant E_m$: ceci permet de savoir si le mouvement est périodique ou non, si la trajectoire est bornée ou non.
- Les points d'intersection de E_m et de $E_p(x)$ sont des points de vitesse nulle.

2. Expression de la force à partir de E_p

Il est possible de retrouver l'expression de la force $\vec{F}$ à partir de la connaissance de l'énergie potentielle E_p. Nous montrons ceci dans le cas unidimensionnel : mouvement selon un axe x et force $\vec{F} = F\vec{e}_x$.

$$\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$
$$\Rightarrow \quad -\mathrm{d}E_p = F\ \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}.$$

Généralisation - opérateur gradient

En dimension supérieure, (si E_p dépend de plusieurs variables d'espace) "$\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle E_p" s'écrit mathématiquement $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}E_p}$.

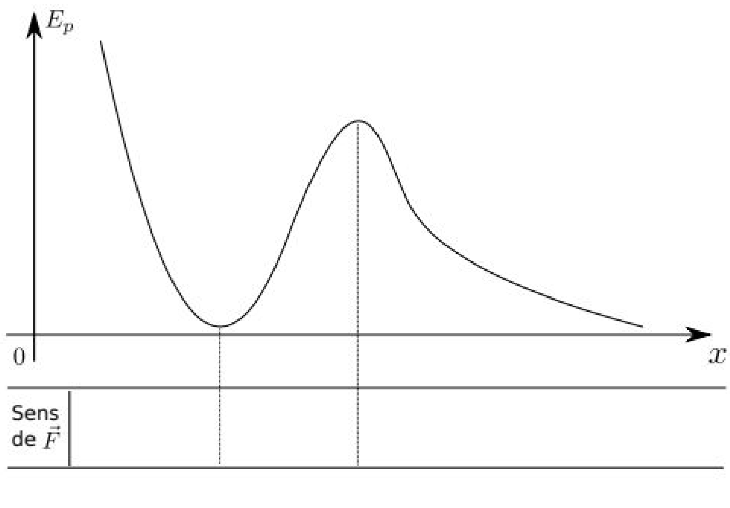
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est l'opérateur gradient, qui s'écrit en cartésiennes $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ (il sera donné dans les autres cas)

3. Positions d'équilibre stables ou instables

$\rightsquigarrow_3$ D'après ce qui précède, que vaut la force en un point où $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$?

Une position d'équilibre
- est stable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un retour vers la position d'équilibre.
- est instable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un éloignement de la position d'équilibre.

Sur le graphe ci-contre, faire apparaître le sens de la force $\vec{F}$ (vers la gauche ou vers la droite ?) autour de chaque position d'équilibre, et en déduire la stabilité de ces positions. Conclure sur un critère de stabilité à partir du graphe de $E_p(x)$



Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (2)

- Les positions x où $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x)=0$ sont des positions d'équilibre.
- L'équilibre en ces points est $\begin{cases} \text{- stable si } \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}>0 \\ \text{- instable si } \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}<0 \end{cases}$

4. Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

Notion mathématique : développement limité

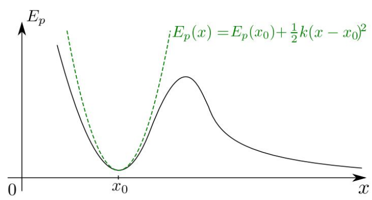
Soit f une fonction (suffisamment dérivable) et x_0 un point. On peut approcher les valeurs de f autour du point x_0 à l'aide d'un développement limité :

$$f(x)=f(x_0)+\underbrace{(x-x_0)f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}}+\underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}}+\underbrace{\frac{(x-x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0)}_{\text{terme d'ordre 3}}+\underbrace{\mathrm{o}\left((x-x_0)^3\right)}_{\text{termes négligeables devant les autres}}$$

Nous l'avons écrit à l'ordre 3 ci-dessus, mais il peut être mené à n'importe quel ordre.
L'écriture de chaque terme permet d'être de plus en plus précis dans la description de f autour de x_0.

a. Mouvements de faible amplitude et approximation harmonique

Notons x_0 la position d'un équilibre stable. On s'intéresse ici au mouvement du point M lorsqu'il reste au voisinage de x_0. On peut effectuer un développement limité à l'ordre 2du potentiel autour de x_0 :



$$E_p(x)\underset{x\to x_0}{\simeq}E_p(x_0)+(x-x_0)\underbrace{E_p'(x_0)}_{=0\text{ car équ.}}+\frac{(x-x_0)^2}{2}\underbrace{E_p''(x_0)}_{>0\text{ car éq stable}}\quad.$$

On a donc :

$$E_p(x)=E_p(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}E_p''(x_0)\,,$$

Écrire alors l'expression de l'énergie mécanique (en fonction de $\dot{x}$ et x), et en déduire l'équation du mouvement. Quel type d'équation bien connue obtient-on ? Quelle est la forme générale des solutions ?

En conclusion, l'équation de l'oscillateur harmonique est importante car elle permet de modéliser bien plus que le système masse-ressort : elle s'applique en première approximation pour les mouvements de faible amplitude de tout système autour d'une position d'équilibre.

b. Mouvements d'amplitude plus importante : effets non linéaires

Les termes négligés dans le développement du potentiel ont pour conséquence des écarts par rapport à la solution de l'oscillateur harmonique : période qui dépend de l'amplitude du mouvement , position moyenne différente de x_0, etc. Ceci sera exploré via une approche numérique.