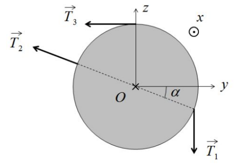
Théorème du moment cinétique

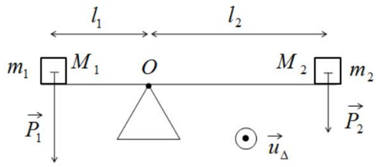
1 * Moments de tensions

Un disque vertical homogène, de rayon R, de centre O, peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal (Ox) (liaison pivot parfaite). Il est attaché à 3 fils aux points A_1, A_2 et A_3. Chacun de ces fils exerce une tension $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_2}$ et $\overrightarrow{T_3}$ représentées ci-dessous.
Calculer le moment de ces 3 forces par rapport à O.



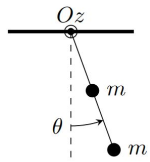
2 *Équilibre d'une balance

On modélise une balance équilibrée par une tige horizontale, pouvant tourner sans frottement autour d'un axe $(O\Delta)$.
On note m_1 et m_2 les masses présentes dans chacun des plateaux, écartés respectivement d'une distance l_1 et l_2 de O.
1) Exprimer les moments $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_1}\right)$ et $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_2}\right)$ des poids $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$, par rapport à l'axe $(O\Delta)$
2) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer à quelle condition la balance est équilibrée.
3) Que devient le résultat précédent lorsque le point O est situé au milieu des deux plateaux ?



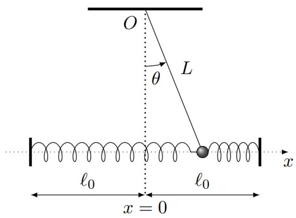
3 ** Entre le pendule simple et le pendule pesant, le pendule lesté

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.
1 - Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0$
2 - Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.
3 - Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?



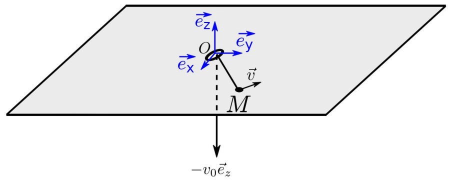
4 **Pendule simple couplé à des ressorts

On considère le dispositif suivant. Les deux ressorts sont identiques (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et on écarte légèrement la masse M supposée ponctuelle de sa position d'équilibre.
En supposant $|\theta| \ll 1$rad, on peut considérer que le mouvement est pratiquement horizontal.
1. Montrer que dans ce cas, on a $x = L\theta$ et $v \simeq L\dot{\theta}$.
2. En appliquant le TMC, déterminer une équation différentielle sur θ.
3. En déduire la période des oscillations.
4. Retrouver ces résultats par une méthode énergétique



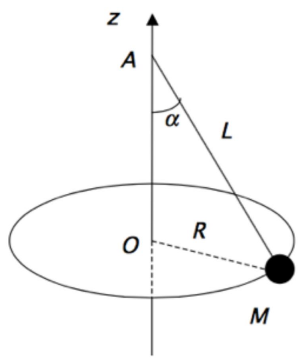
5 ** Masse attachée à une ficelle

Un point matériel M de masse m, attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée vers le bas par un opérateur à une vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{e}_z$ $(v_0 > 0)$. La masse m est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe Oz, et la longueur du fil sur le plan est initialement l_0.
1 - Choisir un système de coordonnées adaptées. Donner l'expression de la distance $r(t) = OM$ en fonction de l_0, v_0 et t.
Donner l'expression du moment cinétique du point M par rapport à O en fonction des mêmes grandeurs qui ci-dessus, ainsi que de m et $\dot{\theta}$.
2 - Appliquer le théorème du moment cinétique au point M. En déduire l'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ du point M.
4 - En déduire la tension du fil exercée sur M.
5 - Calculer directement le travail de traction fourni par l'opérateur s'il fait passer la distance du mobile à l'axe de la valeur r_0 à r.
6 -*** Retrouver ce calcul par une autre méthode.

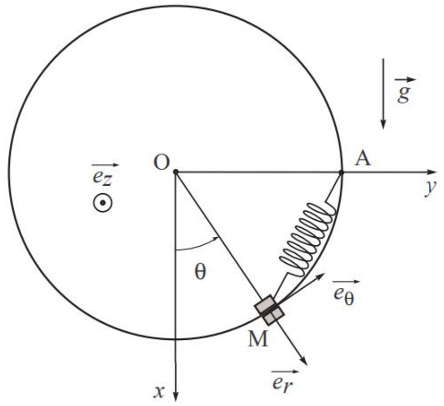


6 *** Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Az. On donne une certaine vitesse initiale à la masse, afin de la faire tourner autour l'axe z. On note ω la vitesse angulaire ainsi atteinte. On note Oxy le plan dans lequel ce mouvement a lieu, et α l'angle qui s'établi entre l'axe et le fil. On suppose un régime stationnaire atteint : α et ω restent constants. On utilisera la base cylindrique dans le plan Oxy, d'axe Oz. La pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_z$.
1 - Étant donné que la force de tension du fil sur la masse est inconnue, par rapport à quel point va-t-il être judicieux de calculer les moments des forces ?
2 - À l'aide du théorème du moment cinétique, donner l'expression de l'angle α en fonction de L, ω et g.



$\boxed{7}$ ***Trois méthodes pour l'étude d'un même mouvement



Un point matériel de masse m est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O. Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable. On notera $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta)$, et on rappelle $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

1) Faire un dessin précis des forces, en introduisant α. Exprimer l'allongement du ressort en fonction de α notamment.

2) Établir l'équation du mouvement du mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :

a) le théorème du moment cinétique ;

b) la relation fondamentale de la dynamique ;

c) le bilan énergétique.

3) Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

Rép :

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{T_1}\right) = T_1 d\,(-\overrightarrow{u_x}) = -T_1 R\cos\alpha\overrightarrow{u_x}$;$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{T_2}\right) = 0$; $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{T_3}\right) = T_3 R\overrightarrow{u_x}$

$\boxed{2}$ $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_1}\right) = +m_1 g l_1$; $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_1}\right) = -m_2 g l_2$; $m_1 l_1 = m_2 l_2$

$\boxed{3}$ Appliquer le TMC au système des deux masses ; revenir à le définition du centre de masse ; non !

$\boxed{4}$ Appliquer le TMC/Δ en O élimine la tension inconnue, $\ddot\theta + \theta\left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right) = 0$; $Ep_p = -mgcos\theta$ (origine en O) ; $Ep_R = \frac{1}{2}kx^2$

$\boxed{5}$ $r = l_0 - v_0 t$; $\overrightarrow{\mathcal{L}}_O = m(l_0 - v_0 t)^2\dot\theta\vec{e}_z$ $\overrightarrow{\mathcal{L}}_O = \overrightarrow{cste}$; $\dot\theta = \frac{r_0 v_0}{(r_0 - Vt)^2}$; le PFD en polaires donne $F(t) = M\frac{(r_0 v_0)^2}{(r_0 - Vt)^3}$;Exprimer le travail élémentaire $dW = F(t)(-dr)$ avec $F(t) = M\frac{(r_0 v_0)^2}{r^3(t)}$ puis intégrer $\Rightarrow W = \frac{1}{2}M\,(r_0 v_0)^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$; Utiliser le TEC.

$\boxed{6}$ Appliquer le TMC vectoriel en A pour éliminer la tension inconnue ; $\overrightarrow{\mathcal{L}}_A = \ell m\omega\sin\alpha(\cos\alpha\vec{e}_r + \sin\alpha\vec{e}_z)$; $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = mg\ell\sin\alpha\vec{e}_\theta$; Appliquer le TMC en n'oubliant pas de dériver $\vec{e}_r$ dans $\vec{L}_A$, on arrive à $\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$

$\boxed{7}$ Faire un BEAU dessin est indispensable pour pouvoir raisonner $\Delta\ell = 2R\sin\alpha$ (raisonner sur la "moitié" OAI du triangle OAM, on a posé $\alpha = \frac{\pi/2 - \theta}{2}$) ; $M_z(\vec{R}) = 0$; $M_z(\vec{P}) = -mgR\sin\theta$; $M_z(\vec{T}) = +T.OI$ (bras de levier) $= 2kR^2\sin\alpha\cos\alpha = kR^2\cos\theta$; $\ddot\theta + \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{k}{m}\cos\theta = 0$