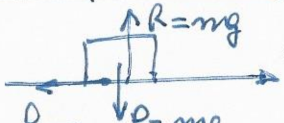
Coefficient frottement solide

1)



• PFD/Ox : $m\ddot{x} = fmg$

$\overset{\int}{\Rightarrow} v = v_0 - fgt$ Arrêt pour $t_A = \frac{v_0}{fg}$

$\overset{\int}{\Rightarrow} x = v_0 t - \frac{1}{2} f g t^2 \Rightarrow x(t_A) = \boxed{d = \frac{v_0^2}{2fg}}$

car $\vec{R_T} = \text{cste}$

• TEM entre $t=0$ et $t_{arrêt}$: $\frac{1}{2}m(0 - v_0^2) = W(\vec{R_T}) = -fmg \times d \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2fg}$

seule force non conso

Ralentissement d'1 voiture

• $P_{frott} = \vec{F}_{frott} \cdot \vec{v} = -kv^3$. A $V = V_{max}$, $P_{frott} + P_{mot} = 0$

$(E_c, E_p = \text{cste}) \Rightarrow k = \frac{P_M}{V_\Omega^3} \overset{AN}{=} 0{,}78$ SI

ou $\begin{cases} \text{TPC} : \frac{dE_m}{dt} = P_{frott} \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} = -k\dot{x}^3 \\ \text{PFD sur } Ox : m\ddot{x} = -k\dot{x}^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 \end{cases}$

Savoir refaire

Separation variables $\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt \overset{\int}{\Rightarrow} \left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}t$

⚠ Bornes !

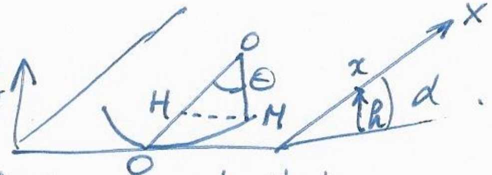
$\Rightarrow \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t$. $v = \frac{v_0}{2}$ pour $t = t_{1/2} \Rightarrow \boxed{\frac{t_1}{2} = \frac{m}{kv_0}} \overset{AN}{=} 32\,s$

• On a $\frac{1}{v} = \frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0} \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0 t}{m}} \overset{\int}{\Rightarrow} x = \frac{v_0 m}{kv_0}\left[\ln\left(\frac{kv_0 t}{m} + 1\right)\right]_0^t$

Pour $t = t_{1/2} = \frac{m}{kv_0}$, $\boxed{x_{t_{1/2}} = \frac{m}{k}\ln(2)} \overset{AN}{=} 888\,m$

$x \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty \Rightarrow$ trop peu de frottement à basse vitesse (modèle en kv ?)

Pendule simple



- Dans le plan incliné, un point d'absice x a 1 cote $h = x \sin\alpha$.

$\Rightarrow z_M = z_H = l(1 - \cos\theta)\sin\alpha$

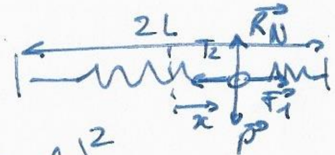
Donc $E_p = mgl(1 - \cos\theta)\sin\alpha$ (origine en O)

Mvt sans frottement, $E_m = \text{cste} = E_p + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$

$\overset{Deriv}{\Longrightarrow} mgl\dot{\theta}\sin\theta\sin\alpha + ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\sin\alpha = 0}$

Oscillateur à 2 ressorts



1) $E_p = \frac{1}{2}k(L + x - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(L - x - l_0)^2$

2) Pas de frottements $\Rightarrow R_N$ ne travaille pas, $E_m = \text{cste}$

Ne pas dire "il n'y a que des forces conservatives"

$\Rightarrow k\dot{x}(L + x - l_0) + k(-\dot{x})(L - x - l_0) + \underbrace{m\dot{x}\ddot{x}}_{dE_c/dt} = 0$

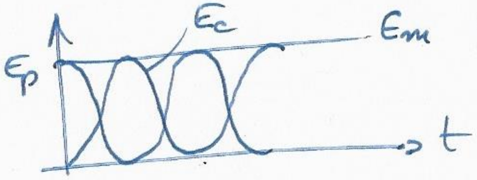
$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + 2kx = 0}$ $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ (comme si 1 seul ressort $2k$)

3) Solution $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.

$\Rightarrow \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$.

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, $x(0) = \frac{l_0}{2} \Rightarrow A = l_0/2$

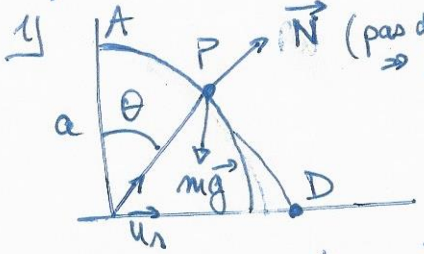


(En prenant E_p nulle en $x = 0$)

Allure sinusoidale car x en $\cos\omega t \Rightarrow E_p$ en $\cos^2\omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$

Igloo

1)



(pas de frott $\Rightarrow \perp$)

• PFD sur $\vec{u_r}$: $N - mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{a}$

$\Rightarrow N = m\left(g\cos\theta - \dfrac{v^2}{a}\right)$ (1)

• TEc entre A et P :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \underbrace{mga(1-\cos\theta)}_{W(\vec{P})_{A\to P}} \Rightarrow \frac{v^2}{a} = 2g(1-\cos\theta)$$

dans (1) : $\boxed{N = mg(3\cos\theta - 2)}$

$N = 0 \Leftrightarrow 3\cos\theta_0 = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{\theta_0 = 48°}$

Alors $v_0 = \sqrt{2ga(1-\cos\theta_0)} \overset{AN}{=} 3{,}6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

2) - Trajectoire ultérieure = (chute libre) = parabole

- TEc entre A et D, seule force qui travaille = poids

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = mga \Rightarrow v_D = \sqrt{2ga} \overset{AN}{=} 6{,}3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

mvt circulaire Perle sur une hélice

• $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = p\theta \end{cases} \Rightarrow v^2 = (R^2+p^2)\dot{\theta}^2$

• Frottements négligeables $\Rightarrow W(\vec{R_N}) = 0$, $E_m = \text{cste}$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{m}gp\theta}_{Ep_{poids}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}(R^2+p^2)\dot{\theta}^2}_{E_c} = \underbrace{\cancel{m}gp\theta_0}_{E_{m\,initiale}}.$$

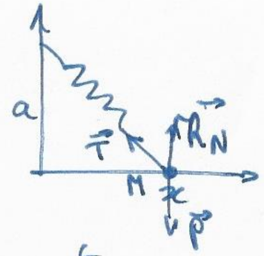
• $\dfrac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow gp\cancel{\dot{\theta}} + (R^2+p^2)\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\dfrac{gp}{R^2+p^2}$

par intégration $\begin{cases} \dot{\theta}_0 = 0 \\ \theta_0 \end{cases}$ $\boxed{\theta = \theta_0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{gp}{R^2+p^2}t^2}$

Oscillateur de Landau

$Ep_{poids} = 0 = cste$

$Ep_{ressort} = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2+a^2} - l_0\right)^2$



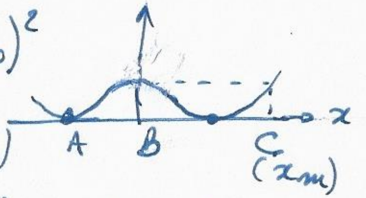
1) $\vec{R_N}$ ne travaille pas $\Rightarrow Em = cste$

2) Position d'équilibre ssi $\frac{dEp}{dx} = 0$] dérivée/espace et pas temps!

$$\frac{dEp}{dx} = k\left(\sqrt{x^2+a^2} - l_0\right)\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{kx\left(\sqrt{x^2+a^2} - l_0\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

équilibres $\begin{cases} x = 0 \text{ toujours} \\ l_0 = \sqrt{x^2+a^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}, \text{ si } l_0 > a. \end{cases}$

3.1) $Em = cste = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{min}^2}_{\text{en A}} = \underbrace{\frac{1}{2} k (a - l_0)^2}_{\text{en B (immobile)}}$



$$\Rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,(l_0 - a) \quad (\text{car } l_0 > a)$$

3.2 $Em_B = Em_C \Leftrightarrow \frac{1}{2} k (l_0 - a)^2 = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x_m^2 + a^2} - l_0\right)^2$

donc $\begin{cases} l_0 - a = \sqrt{x_m^2+a^2} - l_0 \Rightarrow \sqrt{x_m^2+a^2} = 2l_0 - a \quad (1) \\ \text{ou } \cancel{l_0} - a = \cancel{l_0} - \sqrt{x_m^2+a^2} \Rightarrow x_m = 0 \text{ (inutile)} \end{cases}$

$(1) \Rightarrow x_m^2 + \cancel{a^2} = 4l_0^2 - 4al_0 + \cancel{a^2} \Rightarrow \boxed{x_m = 2\sqrt{l_0^2 - al_0}}$

4) Taylor : $Ep(x) = Ep(0) + x \cancel{\frac{dEp}{dx}\Big|_0} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2Ep}{dx^2}\Big|_0$] méthode à connaître.

(on peut aussi faire 1 DL de Ep(x) à l'ordre 2
on sait qu'à l'ordre 1 le terme est nul)

or $\frac{dEp}{dx} = k\left[x - l_0 x (x^2+a^2)^{-1/2}\right]$

$$\Rightarrow \frac{d^2Ep}{dx^2} = k\left[1 - l_0\left((x^2+a^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} x \times 2x \,(x^2+a^2)^{-3/2}\right)\right]$$

$$\frac{d^2Ep}{dx^2}(0) = k\left(1 - \frac{l_0}{a}\right)$$

$$\Rightarrow Ep(x) = \frac{1}{2} k (a - l_0)^2 + \frac{kx^2}{2}\left(\frac{a - l_0}{a}\right)$$

$Em = cste \xrightarrow{\text{deriv}} \cancel{m}\,\cancel{\dot{x}}\,\ddot{x} + kx\cancel{\dot{x}}\left(\frac{a - l_0}{a}\right) = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{a - l_0}{a}\right)}}$$

Rque physique : - homogène
- $\omega = 0$ si $a = l_0$! bizarre ?
Non car on est "à la frontière" entre les 2 profils d'énergie et pour l'autre, pas d'oscillations du tout (max d'Ep en $x = 0$).

= + le jour de l'oral...