Solide en rotation

1 * Portage d'une poutre

Deux personnes portent une poutre de longueur $2L$ et de masse m. Une personne se trouve tout à l'arrière de la poutre (point M), l'autre se situe à une distance d en avant du centre de gravité G de la poutre (point N). On suppose que les forces exercées par les deux personnes sont verticales.
1. Si les personnes ont la même taille, la poutre est horizontale.
a) Faire un schéma. Les forces exercées par les deux personnes sont-elles les mêmes ?
b) Déterminer, dans ce cas, les normes des forces exercées en M et en N par les deux personnes.
2. Les personnes montent alors un escalier, toujours en tenant la poutre. Déterminer à nouveau les normes des forces exercées en M et N par les deux personnes. Commentaires ?

2 * Équilibrage d'une roue.

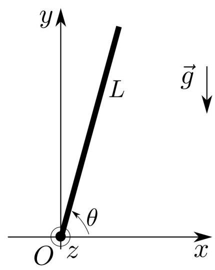
Un disque de centre O possède une masse m et peut tourner sans frottement autour d'un axe (Oz) à une vitesse angulaire $\omega(t)$. Ce disque est non homogène, et son centre d'inertie G est situé à une distance $a \neq 0$ de O. On note J_z le moment d'inertie du disque selon l'axe (Oz).
1) Initialement, la vitesse angulaire vaut ω_0. Comment évolue-t-elle dans le temps ?
2) À l'instant initial, G est situé sur l'axe (Ox). Écrire l'évolution du vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction du temps, dans les coordonnées cartésiennes.
3) En déduire l'expression de la réaction $\vec{R}$ de la liaison pivot. Commenter.

3 ** Poulie entrainée par une masse

Une poulie de masse m_p, de rayon R et de centre O, peut tourner avec frottements autour d'un axe (Oz). On repère la rotation de la poulie grâce à l'angle θ que fait un point A situé à la périphérie de la poulie, par rapport à l'axe (Oz). Le moment d'inertie de la poulie vaut J.
Un fil est enroulé autour de la poulie, une masse m y est accroché. À l'instant initial, la masse m ne possède aucune vitesse, et on la libère de ses contraintes. Le moment des forces de frottements de la liaison pivot (Oz) vaut $\mathcal{M}_z(\vec{f}) = -\alpha\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation de la poulie.
1) Justifier que la tension du fil n'est pas égale à mg, et exprimer sa valeur en fonction de $m, g, R, \dot{\omega}$
2) Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire ω.
3) En déduire $\omega(t)$ ainsi que sa valeur limite ω_l atteinte en régime permanent.
4) Retrouver la valeur de ω_l par un bilan de puissance.

4 ** Chute d'un arbre

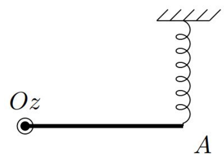
On souhaite connaître la durée que met un arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol. On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10$ m et de masse m, reliée au sol par une liaison pivot parfaite, et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 0,9 \times \frac{\pi}{2}$.
On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J = \dfrac{1}{3}mL^2$.
1 - Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre.
2 - Justifier pourquoi $E_c + E_p$ est constante au cours du mouvement.
Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.
3 - En déduire la relation $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}$.



4 - Pour exprimer la durée T de la chute, isoler $\mathrm{d}t$ dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta(0)$ et $\theta = \theta$ (final). Puis faire l'A.N. On donne le résultat numérique : $\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} = 4,315$ pour $\theta_0 = 0,9 \times \frac{\pi}{2}$.

5 ** Barre fixée à ses extrémités

Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse m, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.
1 - Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de k et de ℓ_0.
2 - La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.



6 ** Entraînement par frottements

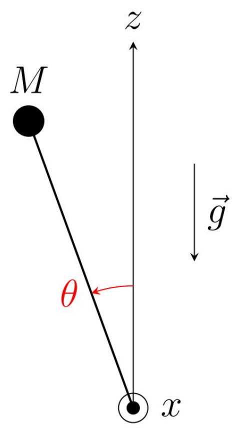
On considère deux disques identiques liés à deux axes distincts par des liaisons pivots parfaites, et on aligne ces deux axes selon la même direction (Ox) horizontale. On note leurs moment d'inertie par rapport à cet axe J. Le premier disque tourne initialement avec une vitesse angulaire Ω, alors que le second disque est initialement immobile.
On translate lentement le second disque selon l'axe (Ox) jusqu'à ce qu'ils rentrent en contact, et le premier disque entraîne alors le second par frottement.
1. Déterminer la vitesse angulaire finale commune des deux disques.
2. Faire un bilan d'énergie pour chaque disque.
3. Comment évolue l'énergie mécanique totale de chacun des deux disques, et de l'ensemble ? Commenter

7 ** Enseigne de saloon

L'enseigne est une planche de bois de hauteur h, de masse M. Étant suspendue par deux crochets à une potence horizontale, on la considère comme liée à celle-ci par une laison pivot parfaite horizontale. On note alors $J = \frac{Mh^2}{3}$ son moment d'inertie par rapport à cet axe.
Elle est frappée par une balle de masse m, arrivant horizontalement à une vitesse v_0 et la frappant en plein centre. On considère que le choc est inélastique (l'énergie cinétique n'est pas conservée, à cause de la déformation de la balle et de la planche), et que la balle reste solidaire de la planche.
1. Déterminer la vitesse angulaire ω_0 de l'enseigne après impact de la barre.
2. Déterminer l'amplitude θ_m des oscillations de l'enseigne.
3. Exprimer l'énergie dissipée au moment de l'impact.

8 *** Gravimètre à ressort spirale

Instrument ancien, un gravimètre de Holweck-Lejay est constitué d'une tige de longueur L, libre de tourner autour d'un axe Ox, au bout de laquelle est placée en M une masse m. On note J_{Ox} le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox de l'ensemble {tige+masse }, et on donne $J_{Ox} = mL^2$ (on a négligé la masse de la tige et on suppose ponctuelle la masse située au bout). La liaison pivot en O est supposée parfaite.
Par ailleurs, un ressort spirale, non représenté sur le dessin, tend à retenir la tige en position verticale en exerçant sur la tige un couple (c'est-à-dire un moment résultant, par rapport à l'axe Ox)$\mathcal{M}_x = -C\theta$ autour de l'axe de rotation, avec $C > 0$ la constante de raideur du ressort. On admet que ce couple dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}C\theta^2$



1 - En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation du mouvement du pendule portant sur l'angle θ.
2 - a - Montrer que les positions d'équilibre $\theta_{\text{éq}}$ de la tige sont solution de l'équation

$$\sin\theta_{\text{éq}} = \frac{C}{mgL}\theta_{\text{éq}} .$$

b - Puis justifier qu'il existe trois positions d'équilibre si $C/mgL < 1$ et une seule sinon (on pourra raisonner graphiquement, en traçant $y = \sin\theta$ et $y = \dfrac{C}{mgL}\theta$).
3 - On souhaite étudier la stabilité de la position d'équilibre en $\theta = 0$.
a - Pour cela, donner l'expression de l'énergie potentielle totale du système { masse+tige+ressort } en fonction de l'angle θ.
b - Puis démontrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ n'est stable que si $C/mgL > 1$.
4 - Intuitivement, que peut-on dire de la stabilité des positions d'équilibre en $\theta \neq 0$ dans le cas où $C/mgL < 1$?
5 - Supposons que la raideur du ressort spirale soit telle que $C/mgL > 1$, et que les conditions initiales garantissent un mouvement de faible amplitude.
Déterminer la période des oscillations en termes de $g_0 = C/mL$ et expliquer l'utilisation de l'appareil en gravimètre, c'est-à-dire comme appareil de mesure des variations de g.

Rép :

1 Appliquer le TMC en G, puis le PFD ; $F_1 = \dfrac{mgd}{L+d}, F_2 = \dfrac{mgL}{L+d}$; mêmes résultats

2 $\omega(t) = \omega_0 = \text{cste}$; $\overrightarrow{OG} = a\cos(\omega_0 t)\,\overrightarrow{u_x} + a\sin(\omega_0 t)\,\overrightarrow{u_y}$; $\vec{R} = mg\overrightarrow{u_z} - ma\omega_0^2\left[\cos(\omega_0 t)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega_0 t)\,\overrightarrow{u_y}\right]$

3 La masse accélère, y appliquer le PFD $\vec{T} = m(R\dot{\omega} + g)\vec{u}_z$; $(J + mR^2)\dot{\omega} = -Rmg - \alpha\omega$; $\omega(t) = -\frac{Rmg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$; Que vaut $\vec{T}$ en régime permanent ? Appliquer le TPC à la poulie

4 $Ep = mgL\sin\theta/2$, T = 2,5 s

5 Appliquer le TMC en O, exprimer le déplacement de A en fonction de θ ; Utiliser le bras de levier. $\ell_{eq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{2k}$; $T = 2\pi\sqrt{m/3k}$

6 Montrer la conservation du moment cinétique du système global ; $\Omega' = \Omega/2$; $\Delta Em_{total} = -J\Omega^2/4$

7 Montrer la conservation du moment cinétique du système global pendant le choc, et celle de l'énergie après le choc $\omega_0 = \dfrac{mv_0 h/2}{J + mh^2/4}$; $\theta_m = \arccos\left(1 - \dfrac{(J + mh^2/4)\omega_0^2}{(M+m)gh}\right)$; $\Delta Ec = \dfrac{1}{2}(J + mh^2/4)\omega_0^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 < 0$

8 $\ddot{\theta} - \frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{C}{mL^2}\theta$; $E_p = MgL\cos\theta + \frac{1}{2}C\theta^2$; $T_0 = 2\pi\sqrt{L}\,(g_0 - g)^{-1/2}$