Solide en rotation

Ce qu'il faut connaître

- Quelle est la définition d'un solide (sous-entendu indéformable ou idéal) ?
- Comment s'écrit le moment cinétique d'un solide par rapport à un axe Δ, étant donné sa vitesse angulaire et son moment d'inertie par rapport à cet axe ?
- Comment est défini, lorsqu'il existe, le point d'application d'une force ?
- Quelle est la définition d'un couple ? ($\rightarrow$ action mécanique dont la résultante est...)
- Que peut-on dire lorsqu'une liaison pivot est supposée parfaite ? (en termes de moment et de puissance)
- Comment s'énonce le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ?
- Comment s'écrit l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe, étant donné sa vitesse angulaire et son moment d'inertie par rapport à cet axe ?
- Comment s'énonce le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ?

Ce qu'il faut savoir faire

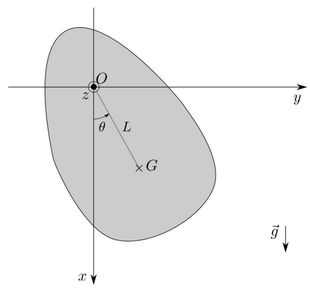
- Pour un solide, savoir reconnaître un mouvement de translation (et les cas particuliers de translation rectiligne ou circulaire) ainsi qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.
- Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe, à la vitesse angulaire ω, M un point du solide et R la distance entre M et l'axe. Comment s'exprime la vitesse $\vec{v}$ du point M ?
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Utiliser le théorème du moment cinétique pour étudier un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.
- Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour étudier un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Exercices de cours

C1 - Application du TMC dans le cas d'un seul couple

On considère un disque en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe implique un couple de frottement noté C, proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ω : $C = -\alpha\omega$ avec α pris constant. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz.
1 - Quel est le signe de α ?
2 - Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.
3 - La résoudre en supposant qu'on lance le disque avec une vitesse angulaire initiale ω_0.

C2 - Pendule pesant, méthode avec le TMC

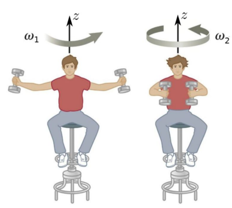


On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe est supposée parfaite. G est le centre d'inertie du solide. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz, et m_{tot} sa masse totale.
1 - Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.
2 - On se place dans l'approximation des oscillations de petite amplitude. Donner l'expression de la pulsation du mouvement.

C3 - Même pendule pesant, méthode avec le TEC

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique afin de retrouver l'équation du mouvement.

C4 - Tabouret d'inertie



Une personne est en rotation sur un tabouret tournant. Il porte un poids dans chaque main.
– Initialement, ses bras sont écartés du corps. Sa vitesse angulaire ω_1 est faible.
– Puis il rapproche ses bras du corps : sa vitesse angulaire augmente. Sa vitesse finale ω_2 est grande.
On note J_1 le moment d'inertie "bras écarté", et J_2 celui "bras contre le corps".
1 - Justifier que le moment cinétique par rapport à l'axe z du système tabouret+personne+poids est constant tout au long de l'expérience.
2 - Expliquer alors pourquoi la vitesse angulaire augmente lorsqu'on rapproche les bras.
3 - Prenons par exemple $J_1 = 15$ kg.m^2, $J_2 = 5$ kg.m^2, et une vitesse initiale $\omega_1 = 1,0$ rad. s^{-1}. En déduire la valeur de ω_2.
4 - Montrer que l'énergie cinétique du système tabouret+personne+poids n'est pas conservée, mais augmente. D'où vient ce surplus d'énergie ?
5 - Calculer le travail fourni par la personne entre les états initiaux et finaux.

I. Mouvement d'un solide (cinématique)

1. Définition d'un solide

Définition : solide

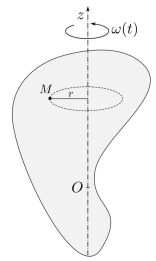
Un solide (sous-entendu : indéformable) est un système dont tous les points restent à distance constante les uns des autres.

2. Mouvement de translation

Définition : mouvement de translation

Un solide est en mouvement de translation si son orientation est fixe au cours du mouvement, trois formulations équivalentes :
- Pour tous points A et B du solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant au cours du mouvement.
- Au cours du mouvement, les trajectoires de chacun de points du solide sont les mêmes mais décalées les unes par rapport aux autres.
- À chaque instant, quels que soient les points A et B du solide, $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$.

3. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe



La vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ ne dépend pas du point M considéré. On peut parler de LA vitesse angulaire du solide.
Le vecteur vitesse d'un point M du solide est tangent au cercle décrit par M, de norme $r|\omega|$ avec r la distance à l'axe.

II. Solide en rotation

1. Moment cinétique et moment d'inertie d'un solide

Dans le cas d'un système de points M_i de masses m_i, le moment cinétique de l'ensemble (par rapport à un axe) est donné par la somme des moments cinétiques de chaque point :

$$\sigma_{Oz} = \sum_i \sigma_{Oz}(M_i)\,.$$

Nous allons voir que dans le cas d'un solide, ceci peut s'exprimer simplement.

a. Moment cinétique

Moment cinétique

Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe Δ à la vitesse angulaire ω. Son moment cinétique par rapport à Δ s'écrit

$$\boxed{\sigma_\Delta = J_\Delta \omega}$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ (unité S.I. : $\mathrm{kg \cdot m^2}$).

Démonstration (non exigible) :
Soit $\Delta = Oz$ (orienté par $\vec{e}_z$). Pour obtenir le moment cinétique du solide, on le découpe en morceaux centrés sur des points M_i, chacun de masse m_i, et on considère chaque morceau comme une masse ponctuelle.
On prend des coordonnées cylindriques d'axe Oz, et on note r_i la distance entre M_i et l'axe Oz. Comme le solide est en rotation autour de l'axe, $r_i = \text{cst}$ et $\vec{v}(M_i) = r_i\dot{\theta}_{e_\theta}$, avec $\dot{\theta}$ identique pour tous les points.
Le moment cinétique de la masse M_i par rapport à cet axe est

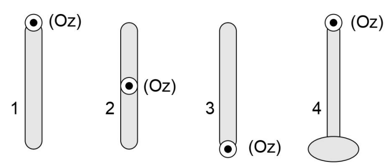
$$\sigma_{Oz}(M_i) = \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}(M_i)\right)\cdot\vec{e}_z = \left(r_i\vec{e}_r \wedge m_i r_i\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)\cdot\vec{e}_z = m_i r_i^2\dot{\theta}$$

Le moment cinétique du solide est la somme des moments cinétiques des points M_i :

$$\sigma_{Oz} = \sum_i \sigma_{Oz}(M_i) = \sum_i m_i r_i^2\dot{\theta} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\dot{\theta} = J_{Oz}\dot{\theta} \quad \text{avec} \quad J_{Oz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right).$$

b. Moment d'inertie

On a obtenu dans la démonstration ci-dessus l'expression du moment d'inertie J_{Oz}.
- Il dépend de l'axe par rapport auquel il est défini.
- Il rend compte de la répartition de la masse du solide autour de l'axe, et de la difficulté à mettre en rotation le solide (ou à arrêter sa rotation).



On voit sur la formule que plus la masse est répartie loin de l'axe, plus il est important (termes en r_i^2).
Remarque : dans un énoncé, l'expression du moment d'inertie est toujours donnée.
$\rightsquigarrow_4$ Classer les moments d'inertie des solides ci-contre, par rapport à l'axe Oz, du plus petit au plus grand.

c. Remarque : lien avec le cas d'un point matériel (ponctuel)

Pour un seul point M, ponctuel de masse m, la formule $J_{Oz} = \sum_i m_i r_i^2$ de la démonstration indique que son moment d'inertie est :

$$\boxed{J_{Oz} = mr^2}, \text{ avec } r = OM.$$

Son moment cinétique est donc : $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$

Moment cinétique d'un ensemble {solide + point matériel}

On somme les deux moments cinétiques / moments d'inertie : $\boxed{\begin{cases} \sigma_{Oz,total} = \sigma_{Oz,solide} + mr^2\dot{\theta} \\ J_{Oz,total} = J_{Oz,solide} + mr^2 \end{cases}}$

2. Moment d'une action mécanique sur un solide

La notion de force est pertinente pour un point matériel M. Il n'y a pas d'ambiguïté : la force $\vec{F}$ s'applique sur le point M. Puis on peut calculer son moment par rapport à un point A : $\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$.
Les choses sont plus compliquées pour un système ou un solide. On parle plutôt d'action mécanique. Par exemple l'action de la pesanteur sur le solide, ou une action de contact (forces de pression, action d'un ressort attaché sur le solide, d'une liaison pivot, action de contact sur un plan, etc...).
Une action mécanique est caractérisée par un torseur, défini en un point A quelconque par sa résultante $\vec{F}$ (indépendante du point A) et son moment $\vec{\mathcal{M}}_A$ en A : $\tau = \left\{\vec{F}, \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\right\}_A$.

a. Moment d'une force avec point d'application

Le point d'application de l'action mécanique est le point M où le moment s'annule (si ce point d'application existe, alors le professeur de SII appellera ce torseur un "glisseur").

Moment d'une force avec point d'application

Soit $\vec{F}$ une résultante de force, et M son point d'application (on suppose qu'il existe). Son moment par rapport à un axe Oz, orienté par $\vec{e}_z$, est

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$$

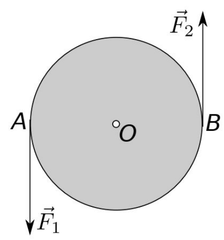
On a les mêmes formules que pour un point matériel, et les mêmes méthodes de calcul.
Le point d'application est toujours évident :
- Le point d'application de l'action de la pesanteur est le centre d'inertie, ou centre de masse, G.
- Le point d'application d'une force s'exerçant en un point A du solide est ce point A.

b. Couple

Couple

Définition : un couple est un cas particulier d'action mécanique pour laquelle la résultante est nulle.
Propriété : le moment d'un couple ne dépend pas du point où il est calculé. $\forall A, \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_O$.
On le note en général $\vec{C}$ sans préciser le point de référence, et C si c'est le moment par rapport à un axe.

Exemple : On tourne un volant en exerçant avec chaque main une force égale (mais opposée) en A et en B. La somme des forces est nulle, mais ceci entraîne tout de même une rotation du volant.
$\rightsquigarrow_5$ On peut calculer ce couple : c'est la somme des deux moments selon l'axe Oz, avec la méthode du bras de levier (en notant $F = \left\|\vec{F}_1\right\| = \left\|\vec{F}_2\right\|$) :



c. Cas particulier d'une liaison pivot

Liaison pivot

Définition : une liaison pivot d'axe Δ ne permet qu'un seul degré de liberté : une rotation autour de Δ.

ATTENTION, la résultante $\vec{F}$ associée à cette liaison n'est en général pas nulle, ne pas l'oublier dans le bilan des forces !
Concernant le moment scalaire selon l'axe $\Delta, \mathcal{M}_\Delta$:
- S'il y a des frottements, il n'est pas nul. On peut parler de couple de frottements, qui résiste au mouvement.
- Si la liaison pivot est parfaite, alors $\mathcal{M}_\Delta = 0$.

3. Théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation (axe fixe)

On se place dans un référentiel galiléen. Soit Oz un axe fixe dans ce référentiel, autour duquel tourne le solide.
Soit $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$ le moment cinétique de ce solide par rapport à Oz, et $\mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)$ les moments des forces externes appliquées au solide.

$$\text{On a : } \boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)}.$$

S'il y a un couple C qui intervient, il est à considérer comme un moment : on a $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = C + \ldots$.

$\Rightarrow$ La différence avec le cas d'un point est donc dans l'expression de σ_{Oz} : il faut utiliser l'expression $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$.
Ce théorème est admis. Il se démontre en découpant le solide en masses m_i centrées sur des points M_i, puis en appliquant le théorème du moment cinétique à chaque point et en les sommant tous, un peu comme pour le PFD. En particulier, on constate que les moments des forces internes se simplifient et disparaissent. Ce théorème est donc valable aussi pour un système déformable.
$\rightsquigarrow_6$ Faire l'EC1.

4. Application : le pendule pesant $\rightsquigarrow$ EC2.

III. Solide en rotation autour d'un axe fixe : approche avec le théorème de l'énergie cinétique

1. Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Énergie cinétique

Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe Δ à la vitesse angulaire ω. Son énergie cinétique s'écrit

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2}$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ (unité S.I. : $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$).

2. Puissance d'une action mécanique sur un solide

Tout comme pour le moment d'une action mécanique, la puissance associée est en général complexe à exprimer. Seuls les cas simples suivants sont à retenir :

Puissance d'une action mécanique reçue par le système

Soit une action mécanique de résultante $\vec{F}$ et de moment $\vec{\mathcal{M}}_M$.
- Si l'action mécanique possède un point d'application A, alors sa puissance s'écrit

$$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}(A)$$

Exemple : la puissance du poids s'écrit $\mathcal{P} = m\vec{g}\cdot\vec{v}(G)$.
- La puissance associée à l'action mécanique d'une liaison pivot parfaite est nulle.
- Dans le cas d'une liaison pivot qui exerce un couple de frottements ou moteur C :

$$\mathcal{P} = C\omega$$

avec ω la vitesse angulaire de rotation.

3. Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

On se place dans un référentiel galiléen. Soit Oz un axe fixe dans ce référentiel, autour duquel tourne le solide.
Soit $E_c = \dfrac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2$ l'énergie cinétique de rotation de ce solide par rapport à Oz. Soit $\vec{F}_i$ les résultantes appliquées au solide.

$$\text{On a : } \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}\left(\vec{F}_i\right).$$

$\Rightarrow$ La différence avec le cas d'un point est donc dans l'expression de E_c : il faut utiliser l'expression $E_c = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2$.
Enfin, pour un solide en rotation le TMC et le TEC sont équivalents. Dans un problème, il est inutile d'appliquer les deux. Il faut choisir celui que l'on préfère.

IV. Approche énergétique dans le cas d'un système déformable

1. Différences avec le cas du solide

On considère ici un système déformable (par opposition à un solide qui lui est indéformable).

Théorème	Cas du solide	Cas du système déformable
PFD	$m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\text{actions extérieures}}$	Idem.
TMC Rotation, axe fixe	$\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{F}_i\right)}_{\text{actions extérieures}}$	Idem. (mais attention, le moment d'inertie J dépend du temps si le système se déforme)
TEC, rotation axe fixe	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \mathcal{P}\left(\vec{F}_i\right)}_{\text{actions extérieures}}$	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \mathcal{P}\left(\vec{F}_i\right)}_{\text{actions extérieures } \underline{\textbf{et intérieures}}}$

En effet, il peut y avoir des actions internes au système (action d'une partie du système sur une autre partie).
- Dans le PFD et le TMC, les résultantes et les moments des actions intérieures sont de somme totale nulle : il n'interviennent donc pas dans la somme.
- C'est différent dans le TEC. Pour un solide, la puissance des forces intérieures est nulle car la vitesse relative des points est nulle : pas de déplacement relatif $\Rightarrow$ pas de travail.

Ce n'est plus le cas s'il y a déformation ou mouvement des pièces les unes par rapport aux autres : alors la puissance des forces intérieures ne disparaît pas.
Pensez par exemple au système {cycliste + vélo} : sur une patinoire, il ne peut pas bouger (PFD : forces extérieures), mais sur une route il peut gagner de la vitesse (travail des muscles, forces intérieures)
Autre exemple : le "tabouret d'inertie" : Cf TD.

V. Bilan : Parallèle entre mouvements de rotation et de translation

TRANSLATION	ROTATION
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z Vitesse $\dot{z}$	Angle θ Vitesse angulaire $\dot{\theta}$
Masse m Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Composantes des forces $F_{i,z}$	Moment d'inertie J Moment cinétique $L_z = J\dot{\theta}$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,i}$
Loi de la quantité de mouvement : $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = m\ddot{z} = \sum F_{i,z}$ Puissance d'une force $\mathcal{P} = F_z\dot{z}$ Travail$W = \int_{z_A}^{z_B} F_z \, \mathrm{d}z$ Énergie cinétique$E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2$	Loi du moment cinétique scalaire : $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{z,i}$ Puissance d'un moment $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\dot{\theta}$ Travail $W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z \, \mathrm{d}\theta$ Énergie cinétique$E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$
Loi de la puissance cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}\left(F_i\right)$ $\rightsquigarrow$ même équation que le PFD	Loi de la puissance cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}\left(\mathcal{M}_i\right)$ $\rightsquigarrow$ même équation que le TMC
Loi intégrale de l'énergie cinétique : $\dfrac{1}{2}mv_B^2 - \dfrac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W\left(F_i\right)$	Loi intégrale de l'énergie cinétique : $\dfrac{1}{2}J\dot{\theta}_B^2 - \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}_A^2 = \sum_i W\left(\mathcal{M}_i\right)$
Ressort linéaire : x allongement/repos $F_x = -kx$ $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$	Ressort spirale : θ rotation/repos $\mathcal{M}_z = -C\theta$ $E_p = \dfrac{1}{2}C\theta^2$