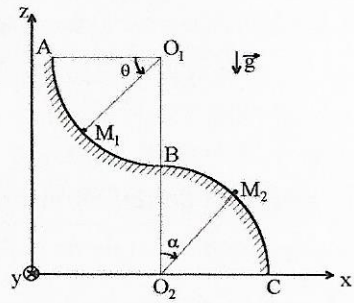
S_2^9

On considère une surface formée de deux quarts de cylindre de rayon r reliés l'un à l'autre. Un point matériel de masse m est abandonné sans vitesse initiale à la partie supérieure A et peut glisser sans frottement sur cette surface. Sur la partie (1) la position du mobile est repérée par $\widehat{AO_1M_1} = \theta$ et sur la partie (2) par $\widehat{BO_2M_2} = \alpha$.

1 - *Le mobile étant sur la partie (1) de cette piste expliquer pourquoi le mouvement est plan. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique, projeter cette relation sur l'axe tangent, en déduire l'expression de la vitesse angulaire en M_1 puis les caractéristiques du vecteur vitesse en B.*



2 - *Le mobile étant maintenant sur la partie (2), projeter la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe tangent et sur l'axe normal; en déduire la valeur de la vitesse du point matériel en M_2 puis l'intensité de la réaction normale de la piste en ce point.*

3 - *Montrer que le mobile quitte la piste en une position que l'on précisera.*

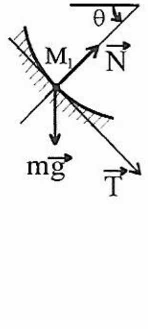
Solution

1 - Le référentiel galiléen choisi est un référentiel terrestre. Le mobile est soumis à son poids (vertical) et à la réaction normale de la piste car il n'y a pas de frottements. Il est abandonné sans vitesse initiale le mouvement se fera donc dans le plan vertical contenant A d'où le choix du plan de figure.

Bilan des forces: $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ relation fondamentale de la dynamique:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

projection de la relation sur Oy :
$\ddot{y} = 0, \dot{y} = cte_1 = 0$ ainsi $y = cte_2 = 0$: mouvement plan.
projection de la relation sur l'axe tangent à la piste en M_1:



$$mr\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\cos\theta$$

ou encore:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{r}\cos\theta$$

Pour intégrer on multiplie les deux membres de l'équation par $\frac{d\theta}{dt}dt$ ce qui donne:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{d\theta}{dt}dt = \frac{g}{r}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}dt$$

d'où :

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2}.\frac{d\theta}{dt}dt = \int \frac{g}{r}\cos\theta d\theta$$

et :

$$\frac{1}{2}(\frac{d\theta}{dt})^2 = \frac{g}{r}\sin\theta + C_1$$

or à $t = 0$ $(\frac{d\theta}{dt})_i = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$
et:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}\sin\theta}}$$

$(\frac{d\theta}{dt})_B = \sqrt{\frac{2g}{r}}$ le vecteur vitesse en B est tangent à la partie (1) et à la partie (2), il est horizontal, sa norme est $v_B = \sqrt{2gr}$.

2 - La relation fondamentale de la dynamique est identique à la précédente à savoir : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$
soit en projection :

- sur la normale
$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\alpha - N(1)$$
- sur la tangente
$$mr\frac{d^2\alpha}{dt^2} = mg\sin\alpha(2)$$

la relation (2) permet de déterminer la vitesse

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{r}\sin\alpha$$

on multiplie par $\frac{d\alpha}{dt}dt$ les deux membres et on intègre :

$$\int \frac{d^2\alpha}{dt^2}\frac{d\alpha}{dt}dt = \int \frac{g}{r}\sin\alpha d\alpha$$

d'où

$$\frac{1}{2}(\frac{d\alpha}{dt})^2 = -\frac{g}{r}\cos\alpha + C_2$$

si

$$\alpha = 0\ (\frac{d\alpha}{dt})_0 = \sqrt{\frac{2g}{r}} \Longrightarrow C_2 = \frac{2g}{r}$$

et

$$\boxed{\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}(2-\cos\alpha)}}$$

ainsi

$$v = r\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{2gr(2-\cos\alpha)}$$

et d'après (1)

$$\boxed{N = mg(3\cos\alpha - 4)}$$

3 - Si le mobile quitte la piste, le contact n'existe plus alors $N = 0$ d'où :

$$\cos\alpha_1 = \frac{4}{3}, \text{impossible.}$$

Le mobile a donc quitté la piste au point B.

S_3^9

Un point matériel de masse m est lancé verticalement vers le haut à l'altitude $z = 0$ avec une vitesse initiale v_0. L'ensemble des frottements qui s'exercent sur lui est équivalent à une force antagoniste au déplacement d'expression $-kv^2$. On admet que le champ de pesanteur est uniforme et de valeur g.

1 - *En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir la loi de la vitesse en fonction du temps lors de la montée du projectile. En déduire la durée de cette phase. (On pourra montrer que $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dz}$).*

2 - *Etablir l'expression de l'altitude en fonction de la vitesse; quelle est l'altitude maximale atteinte?*

3 - *Calculer la vitesse v_1 du point matériel lorsqu'il retombera sur le sol.*

Solution :

1 - Le référentiel choisi est un référentiel terrestre donc galiléen. L'axe vertical Oz est orienté vers le haut. L'origine O est prise au niveau du sol.

Bilan des forces appliquées au point matériel :

- le poids : $m\vec{g}$
- la force de frottement : $-kv^2\vec{u}_z$

Algébriquement sur l'axe Oz on peut écrire :

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v^2$$

Par séparation des variables, il vient :

$$\frac{dv}{1 + \frac{k}{mg}v^2} = -gdt$$

l'intégration conduit à :

$$\int \frac{d(\sqrt{\frac{k}{mg}}v)}{1 + \frac{k}{mg}v^2} = -\sqrt{\frac{kg}{m}}dt$$

soit

$$Arctan\sqrt{\frac{k}{mg}}.v = -\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C_1$$

or à $t = 0, v = v_0$, ce qui implique :

$$C_1 = Arctan\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0$$

et

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{m}{kg}}(Arctan\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0 - Arctan\sqrt{\frac{k}{mg}}v)}$$

Durée t_1 de la phase de montée :

A l'altitude maximale, $v = 0$, donc :

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{m}{kg}} Arctan \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0}$$

2 - Relation entre la vitesse et l'altitude:

Le principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m} v^2$$

or

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} \text{ et } v = \frac{dz}{dt}$$

ainsi :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv^2}{dt} \times \frac{1}{2} \times \frac{dt}{dz}$$

et

$$\frac{dv^2}{2dz} = -g - \frac{k}{m} v^2$$

soit encore :

$$\frac{dv^2}{1 + \frac{k}{mg} v^2} = -2g dz$$

et après intégration il vient :

$$\ell n(1 + \frac{k}{mg} v^2) = -2 \frac{kz}{m} + C_2$$

mais à $z = 0, v = v_0$ donc :

$$C_2 = \ell n(1 + \frac{k}{mg} v_0^2)$$

$$\boxed{z = \frac{m}{2k} \ell n \frac{1 + \frac{k}{mg} v_0^2}{1 + \frac{k}{mg} v^2}}$$

Lorsque l'altitude maximale est atteinte $v = 0$ et :

$$\boxed{z_m = \frac{m}{2k} \ell n(1 + \frac{k}{mg} v_0^2)}$$

3 - Pour la descente l'équation différentielle devient :

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{k}{m}v^2$$

ou

$$\frac{dv^2}{2dz} = -g + \frac{k}{m}v^2$$

soit :

$$\frac{dv^2}{1 - \frac{k}{mg}v^2} = -2gdz$$

et après intégration on obtient :

$$\ell n(1 - \frac{k}{mg}v^2) = +2\frac{kz}{m} + C_3$$

mais pour cette nouvelle phase lorsque $z = z_m = \frac{m}{2k}\ell n(1 + \frac{k}{mg}v_0^2),\ v = 0$

donc :

$$0 = +2\frac{k}{m}\left(\frac{m}{2k}\ell n(1 + \frac{k}{mg}v_0^2)\right) + C_3$$

et

$$C_3 = -\ell n(1 + \frac{k}{mg}v_0^2)$$

en reportant la valeur de la constante, il vient :

$$+\frac{2k}{m}z = \ell n(1 - \frac{k}{mg}v^2)(1 + \frac{k}{mg}v_0^2)$$

ceci permet de calculer la vitesse d'arrivée au sol soit pour $z = 0$

$$(1 - \frac{k}{mg}v_2^2)(1 + \frac{k}{mg}v_0^2) = 1$$

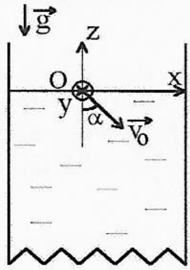
et

$$\boxed{v_2 = \frac{-v_0}{\sqrt{1 + \frac{k}{mg}v_0^2}}}$$

Une bille sphérique de rayon r (faible) et de masse m arrive obliquement à la date $t = 0$ dans un liquide immobile avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec la verticale.

Elle est soumise à la force de pesanteur, à la poussée d'Archimède et à une force de frottement d'expression $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où η est le coefficient de viscosité du liquide.

μ_1 est la masse volumique du liquide et μ celle du solide homogène.



1 - *En appliquant le principe fondamental de la dynamique établir les expressions des composantes du vecteur vitesse.*

2 - *Donner les équations horaires du mobile en posant $\beta = \dfrac{9\eta}{2r^2\mu}$.*

3 - *Comment se comporte la vitesse au bout d'un temps suffisamment long ? Que dire alors du mouvement ?*

Solution :

1 - Le référentiel choisi est le référentiel terrestre local. Pour ce qui est du repère associé son origine est O, le point d'impact de l'objet, l'axe Oz est vertical, l'axe Ox est tel que $\vec{v}_0$ appartient au plan vertical xOz ce qui ne restreint en rien la généralité du problème.

bilan des forces appliquées au solide de petite dimension et que l'on peut assimiler à son centre d'inertie.

- poids : $m\vec{g} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \pi \vec{g}$
- poussée d'Archimède : $-m_1\vec{g} = -\dfrac{4}{3}\pi r^3 \mu_1 \vec{g}$
- force de frottement : $-6\pi\eta r\vec{v}$

D'où l'expression de la relation fondamentale de la dynamique.

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_1\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$$

ou encore
$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m}\vec{v} = \frac{(m - m_1)}{m}\vec{g}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et avec second membre.

Solution particulière (constante)

$$\vec{v}_1 = \frac{(m - m_1)}{6\pi\eta r}\vec{g}$$

Solution de l'équation sans second membre associée:
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{6\pi\eta r\vec{v}}{m}$$

$$\frac{dv}{v}\vec{u} = -\frac{6\pi\eta r}{m}dt\vec{u} \quad (\vec{u} \text{ vecteur unitaire associé à } \vec{v})$$

d'où $\vec{v}_2 = \vec{K}e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}$

et

$$\vec{v} = +\frac{(m-m_1)}{6\pi\eta r}\vec{g} + \vec{K}e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}$$

or à $t = 0, \vec{v}_i = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{K} = \vec{v}_0 - \frac{(m-m_1)}{6\pi\eta r}\vec{g}$

ainsi

$$\vec{v} = \frac{m-m_1}{6\pi\eta r}\vec{g}(1-e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}) + \vec{v}_0 e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}$$

ce qui conduit aux composantes de la vitesse simplifiées en remplacant m et m_1 par leur expression :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \sin\alpha e^{-\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\mu}t} \\ v_y = 0 \\ v_z = -\frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta}(\mu-\mu_1)g(1-e^{-\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\mu}t)}) - v_0\cos\alpha e^{-\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\mu}t)} \end{cases}$$

2 - Par une nouvelle intégration et en considérant les conditions initiales $(t = 0, x_i = 0, y = 0, z_i = 0)$ et en posant $\beta = \frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\mu}$ on obtient les équations horaires :

$$\begin{cases} x = \frac{v_0 \sin\alpha}{\beta}(1-e^{-\beta t}) \\ y = 0 \\ z = -\frac{(\mu-\mu_1)g}{\beta\mu}(t + \frac{e^{-\beta t}-1}{\beta}) + \frac{v_0\cos\alpha}{\beta}(e^{-\beta t}-1) \end{cases}$$

3 - si $t \to \infty$, $v_x = 0$, $v_y = 0$, $v_z = -\frac{\mu-\mu_1}{\beta}g$

le mouvement est vertical, vers le bas, si la masse volumique du solide est supérieure à celle du liquide, sinon mouvement vertical ascendant dans les deux cas sur la droite d'équation $x = \frac{v_0 \sin\alpha}{\beta}$ à vitesse constante v_z.

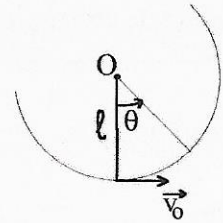
Un point matériel de masse m est relié à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse de longueur ℓ. A partir de sa position d'équilibre on lui impose latéralement une vitesse initiale d'intensité $v_0/v_0^2 = 3g\ell$ de façon à communiquer un mouvement circulaire dans un plan vertical.

1 - *Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au point matériel dans une position quelconque définie par θ.*

2 - *En projetant la relation obtenue sur la tangente et en intégrant exprimer la vitesse en fonction de θ.*

3 - *En projetant la relation fondamentale sur la normale au mouvement exprimer la tension du fil.*

4 - *Comment évolue le mouvement de la masse ?*



Réponses : 1. $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ 2. $\dfrac{dv}{dt} = -g\sin\theta$; $v = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)} = \sqrt{g\ell(1+2\cos\theta)}$ 3. $T = \dfrac{mv^2}{\ell} + mg\cos\theta$; $T = \dfrac{mv_0^2}{\ell} - mg(2-3\cos\theta)$; $T = mg(1+3\cos\theta)$ 4. La vitesse s'annule pour $\cos\theta_1 = -\dfrac{1}{2}$; $\theta_1 = \dfrac{2\pi}{3} rad \simeq 2,09 rad$.

La tension s'annule pour $\cos\theta_2 = -\dfrac{1}{3}$; $\theta_2 = 1,91 rad$.

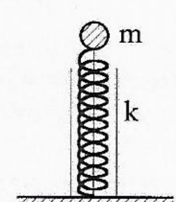
On constate que la tension s'annule avant la vitesse donc le fil se détend et la masse tombe (il n'y a pas d'oscillations).

S_{13}^{9}

Un objet de masse m que l'on assimile à son centre d'inertie est posé sur un ressort de constante de raideur k maintenu vertical.

1 - *On comprime le ressort d'une longueur a et on l'abandonne sans vitesse initiale. Etablir l'équation horaire du centre d'inertie de l'objet et donner la période des oscillations lorsque celui-ci reste posé sur le ressort.*

2 - *Calculer la longueur a minimale à imposer au ressort pour que la masse décolle.*



Réponses : 1. On peut poser $X = x - x_e$ d'où $X = -a\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

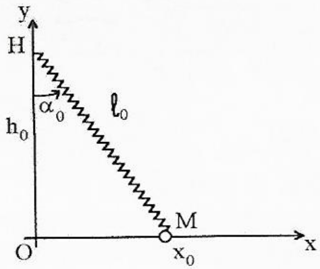
2. $a_{min} = \dfrac{mg}{k}$

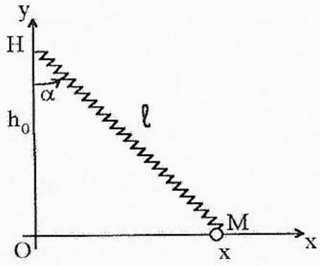
Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal Ox. Ce point est lié à un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, accroché à un point H tel que $OH = k_0 < \ell_0$.
A l'instant initial on lâche le point matériel M sans vitesse à partir d'une position proche de la position d'équilibre.

1 - *Faire un bilan des forces exercées sur le point M, on écrira l'expression de la tension du ressort en fonction de k, x, ℓ et ℓ_0.*

2 - *Par projection de la relation fondamentale, établir l'équation différentielle du mouvement de M sur Ox.*

3 - *A quelle condition les oscillations sont-elles harmoniques (sinusoïdales) ?*
En donner alors l'expression de la période.





Réponses : 1. Poids $m\vec{g}$, réaction $\vec{R}$ normale à Ox, tension $\vec{T}$ du ressort ,

$\vec{T} = -k(\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell_0)\dfrac{\overrightarrow{HM}}{HM}$

2. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx(1 - \dfrac{\ell_0}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}) = 0$

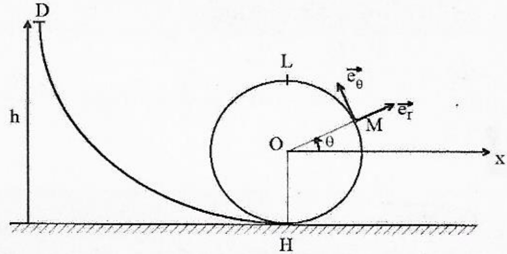
3. Pour $\dfrac{x}{\ell} << 1$, $\dfrac{\ell_0}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \simeq \dfrac{\ell_0}{\ell}(1 + \dfrac{x^2}{\ell^2})^{-1/2} \simeq \dfrac{\ell_0}{\ell}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}(1 - \frac{\ell_0}{\ell})}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{k(\ell - \ell_0)}}$$

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans une gouttière DHL. Le point M est abandonné sans vitesse initiale au point D d'altitude h ; il arrive donc en H avec une vitesse d'intensité $\sqrt{2gh}$. On appelle a le rayon de la piste circulaire.

1 - *Soit $\vec{N}$ la réaction de la gouttière, écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel M dans une position repérée par l'angle θ sur la piste circulaire. Projeter cette relation vectorielle sur les axes de vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.*

2 - *Choisir astucieusement l'une des deux relations obtenues, l'intégrer pour obtenir l'expression $N(\theta)$.*



3 - *En déduire la valeur minimale de h pour que le contact persiste quelque soit θ.*

Réponses : 1. $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_r, \quad \vec{v}_M = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a}_M = a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r, \quad \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_M$

en projection sur $\vec{e}_r$: $-N - mg\sin\theta = -ma\dot{\theta}^2 \quad (1)$

en projection sur $\vec{e}_\theta$: $-mg\cos\theta = ma\ddot{\theta} \quad (2)$

2. relation (2) $-g\cos\theta\dot{\theta} = a\ddot{\theta}\dot{\theta}$, intégration $-g\sin\theta = \frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + cte$

avec les conditions initiales $(t = 0, \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad v_0 = \sqrt{2gh} = a\dot{\theta}_0)$

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta + g(\frac{h}{a} - 1)$$

on reporte dans (1) $N = mg(-3\sin\theta + \frac{2h}{a} - 2)$

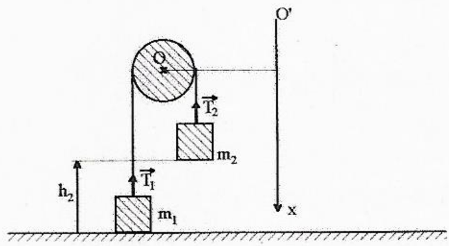
3. La réaction N est minimale en $\theta = \frac{\pi}{2}$, il faut $N > 0 \Rightarrow h > \frac{5}{2}a$.

S^9_{19}

On considère le dispositif ci-dessous, les deux masses $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ sont reliées par un fil souple inextensible ne glissant pas sur la poulie. On donne $m_2 > m_1$ et on choisit un axe $O'x$ orienté vers le bas. A l'instant pris comme origine des temps la masse M_1 décolle du sol avec une vitesse nulle, la masse M_2 est à l'altitude h_2.

1 - *En négligeant l'inertie de la poulie (on admet alors que $T_1 = T_2$) établir les expressions des accélérations des masses M_1 et M_2.*

2 - *A quelle date le mouvement s'arrête-t-il ?*



Déterminer alors la vitesse de chacune des masses.

Réponses : 1. $\gamma_2 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$; $\gamma_1 = -\dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$

2. Le mouvement s'arrête lorsque M_2 touche le sol

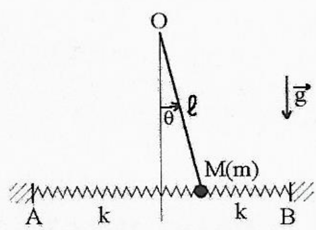
$$t = \sqrt{\frac{2h_2}{\gamma_2}} = \sqrt{\frac{2h_2(m_1 + m_2)}{(m_2 - m_1)g}} \quad v_2 = \sqrt{\gamma_2 h_2}\ ;\ v_1 = -\sqrt{2\gamma_2 h_2}$$

S^9_{20}

On considère un pendule constitué d'une tige de longueur ℓ rigide de masse négligeable.

Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe Δ passant par son extrémité supérieure O. A l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle.

Par ailleurs ce point M est relié à deux ressorts identiques (k, ℓ_0) eux mêmes accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige OM est selon la direction verticale.



On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre. En appliquant le théorème du moment cinétique au point matériel M montrer que le mouvement est harmonique, donner l'expression de la période des petites oscillations.

Réponses : $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\theta - 2k\ell^2\theta\,;\ \ddot{\theta} + \left(\dfrac{g}{\ell} + \dfrac{2k}{m}\right)\theta = 0$, régime sinusoïdal

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}}$$

Force élastique - Équilibre stable ou instable

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ de repère (Ox, Oy, Oz) de vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Une perle quasi ponctuelle P, de masse M, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle (C), de rayon a. Le point P est attaché à un ressort (R) dont l'autre extrémité est fixée en O' $(OO' = a)$.

Le ressort (R) possède une constante de raideur k et une longueur au repos ℓ_0. Le point P est repéré par l'angle $(Ox, OP) = \theta$ (Fig. 24).

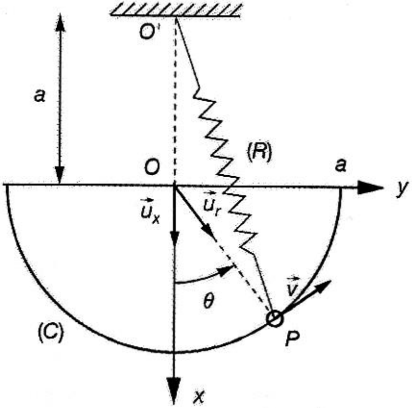


Figure 24

1.a) Exprimer $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de a et θ dans la base polaire $\left(\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{a}, \vec{u}_\theta\right)$. En déduire l'expression du module $O'P$.

b) Exprimer la tension $\vec{T}$ du ressort en fonction de a, k, ℓ_0 et θ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

2. a) Comment s'exprime la vitesse $\vec{v}$ de P dans $\mathcal{R}_g$ en utilisant la base de projection $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$?

b) On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la perle P.

Donner l'expression de $\vec{F}\cdot\vec{v}$ en fonction de θ et $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ (à une constante près) dont dérive la force $\vec{F}$.

3. a) On suppose les relations suivantes entre les paramètres :

$$a = \frac{2Mg}{k} \quad \text{et} \quad \ell_0 = \sqrt{3}\left(a - \frac{Mg}{k}\right).$$

Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$?

b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.

1. a) Nous avons : $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = a\,\vec{u}_x + a\,\vec{u}_r$,

avec $\vec{u}_x = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$, d'où : $\overrightarrow{O'P} = a\,(1+\cos\theta)\,\vec{u}_r - a\sin\theta\,\vec{u}_\theta$.

Il en résulte :
$$O'P = a\,[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]^{1/2} = 2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

b) La tension $\vec{T}$ du ressort dirigée suivant $\overrightarrow{PO'}$ s'écrit :

$$\vec{T} = -k\,(O'P - \ell_0)\,\frac{\overrightarrow{O'P}}{O'P} \quad \text{de module } T = k\,(\ell - \ell_0).$$

Sachant que
$$\overrightarrow{O'P} = 2a\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_r - \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_\theta\right),$$

il vient :
$$\frac{\overrightarrow{O'P}}{O'P} = \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_r - \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_\theta, \quad \text{et} \quad \vec{T} = -k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_r - \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}_\theta\right).$$

2. a)
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\,\vec{u}_r), \quad \boxed{\vec{v} = a\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}.$$

b) Comme la particule glisse *sans frottement* le long de (C), la réaction $\vec{R}$ est dirigée suivant la normale PO (Fig. 25).

Le produit scalaire $\vec{F}\cdot\vec{v}$ a pour expression :

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = (M\vec{g} + \vec{T} + \vec{R})\cdot a\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = a\,\dot{\theta}\,(M\vec{g}\cdot\vec{u}_\theta + \vec{T}\cdot\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = -Mga\sin\theta\,\dot{\theta} + ka\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)\sin\frac{\theta}{2}\,\dot{\theta}.$$

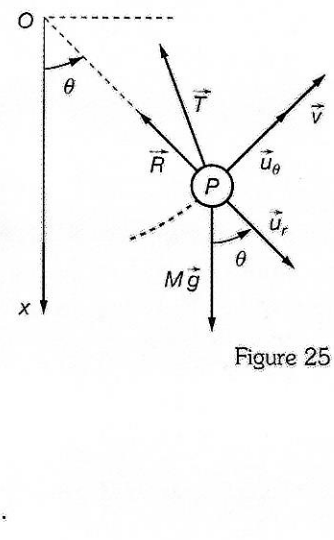


Figure 25

L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ est définie par :

$$d\mathcal{E}_p = -\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell} = -\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

$$d\mathcal{E}_p = Mga\sin\theta\,d\theta - ka\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$d\mathcal{E}_p = Mga\sin\theta\,d\theta - ka^2\sin\theta\,d\theta + k\,\ell_0\,a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

L'intégration conduit à (en notant C la constante d'intégration) :

$$\mathcal{E}_p = (-Mga + ka^2)\cos\theta - 2k\,\ell_0\,a\cos\frac{\theta}{2} + C.$$

3. a) On suppose $a = \dfrac{2Mg}{k}$ et $\ell_0 = \sqrt{3}\left(a - \dfrac{Mg}{k}\right) = \sqrt{3}\,\dfrac{Mg}{k}$.

L'expression de $\mathcal{E}_p$ se simplifie :

$$\mathcal{E}_p = Mga\cos\theta - 2\sqrt{3}\,Mga\cos\frac{\theta}{2} = Mga\left(\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

À l'équilibre, l'énergie potentielle est extrémale. Les positions d'équilibre sont données par :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta} = 0} = M\,g\,a\left(-\sin\theta + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right) = M\,g\,a\sin\frac{\theta}{2}\left(-2\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{3}\right),$$

d'où deux solutions pour θ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin\frac{\theta_1}{2} = 0, \quad \theta_1 = 0,$

et

$$\cos\frac{\theta_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\theta_2}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

b) *La stabilité éventuelle des positions d'équilibre se déduit du signe de* $\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta} = M\,g\,a\left(-\sin\theta + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} = M\,g\,a\left(-\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

- Pour $\theta_1 = 0$, $\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} = M\,g\,a\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ *équilibre instable.*
- Pour $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} = M\,g\,a\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{M\,g\,a}{4} > 0 \Rightarrow$ *équilibre stable.*

Tunnel terrestre

On démontre que, pour tout point M de masse m, situé à l'intérieur de la Terre, à la distance r du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :

$\vec{f} = -m\, g_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r$ (R : rayon de la Terre, $r = CM$, $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}$).

Données numériques : $R = 6{,}4\ 10^6$ m ; $g_0 = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) On considère (Fig. 31) un tunnel rectiligne AB, d'axe Hx ne passant pas par C et traversant la Terre. On note d la distance CH du tunnel au centre de la Terre.

Un véhicule, assimilé à un point matériel M (masse m), glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part du point A de la surface terrestre, sans vitesse initiale.

Le point M étant en mouvement unidirectionnel, son énergie potentielle de gravitation $\mathscr{E}_p(x)$ est définie par :

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -\vec{f} \cdot \mathrm{d}x\, \vec{u}_x$$

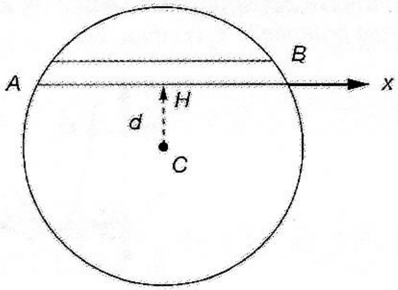


Figure 31

– Quelle est l'expression de $\mathscr{E}_p(x)$ sachant que $\mathscr{E}_p = \frac{m\, g_0 R}{2}$ au point A ?

– Quelle est sa vitesse maximale v_m au cours de son mouvement ?
Calculer v_m sachant que $d = 5\ 10^6$ m.

b) Exprimer $\overline{HM} = x$ en fonction du temps t par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de v_m.

c) Représenter et commenter le graphe de $\mathscr{E}_p(x)$, $\mathscr{E}_p$ étant l'énergie potentielle de gravitation du point matériel M.

Décrire le mouvement du point M à partir de sa position initiale (en A).

---

a) L'énergie *potentielle* $\mathscr{E}_p(x)$ est définie par (Fig. 31) :

$$\mathrm{d}\,\mathscr{E}_p = -\vec{f} \cdot \mathrm{d}x\, \vec{u}_x = \frac{mg_0}{R} \overrightarrow{CM} \cdot \vec{u}_x\, \mathrm{d}x = \frac{mg_0}{R} x\, \mathrm{d}x,$$

soit par intégration : $\mathscr{E}_p(x) = \frac{mg_0}{2R} x^2 + K$ (constante K).

Sachant que $\mathscr{E}_p(A) = \frac{mg_0 R}{2}$ au point A tel que $x_A^2 = HA^2 = R^2 - \mathrm{d}^2$, il vient :

$$K = \frac{mg_0\, \mathrm{d}^2}{2R}, \text{ d'où : } \boxed{\mathscr{E}_p(x) = \frac{mg_0}{2R}(x^2 + \mathrm{d}^2)}.$$

– En l'absence de frottement de glissement, l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$ *se conserve* au cours du mouvement :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2} mv^2 + \mathscr{E}_p(x) = \mathscr{E}_m(A) = \mathscr{E}_p(A) = \frac{mg_0 R}{2},$$

soit : $$v^2 + \frac{g_0}{R}(x^2 + \mathrm{d}^2) = g_0 R, \quad \text{ou} \quad v^2 = g_0\left(R - \frac{\mathrm{d}^2}{R} - \frac{x^2}{R}\right).$$

La vitesse v est donc maximale lorsque $x = 0$, au point H, soit :

$$v_m = \sqrt{g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} = 5\ 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Le mouvement rectiligne du point M est caractérisé par (Fig. 32) :

$$v^2 = \dot{x}^2 = g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right) - \frac{g_0}{R}x^2.$$

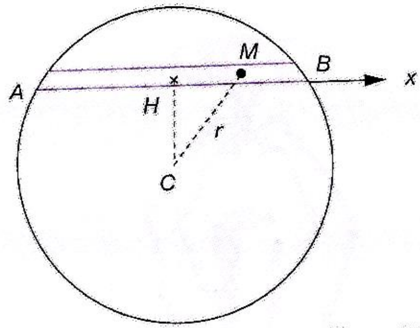


Figure 32

Par dérivation temporelle, on obtient :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0}$$

En posant $\omega = \sqrt{\dfrac{g_0}{R}}$ *(pulsation)*, la solution $x_{(t)}$ s'écrit :

$$x = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t.$$

Les constantes d'intégration a_1 et a_2 se déduisent des conditions initiales :

$$x_{(0)} = \overline{HA} = -\sqrt{R^2 - d^2} = a_1, \qquad \dot{x}_{(0)} = \omega a_2 = 0,$$

d'où : $x = -\sqrt{R^2 - d^2} \cos \omega t$, mouvement *sinusoïdal* de *période* :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

$$v = \dot{x} = \omega\sqrt{R^2 - d^2} \sin \omega t \Rightarrow v_m = \omega\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}.$$

c) $\mathscr{E}_p = \dfrac{m\,g_0}{2\,R}(x^2 + d^2)$; la courbe $\mathscr{E}_p(x)$ caractérise une *cuvette parabolique de potentiel* (Fig. 33).

Le point H correspond à un équilibre *stable* d'énergie potentielle *minimale* :

$$\mathscr{E}_p(0) = \frac{m\,g_0\,d^2}{2\,R}.$$

Le point matériel, placé en A sans vitesse initiale, acquiert une énergie mécanique :

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_p(A) = \frac{1}{2}m\,g_0\,R.$$

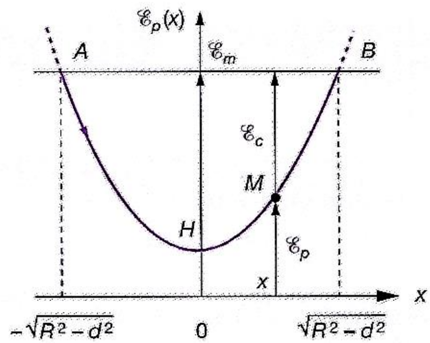


Figure 33

Suivant le chemin $[A, H]$, de l'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique. La *vitesse* du point matériel comme son *énergie cinétique*, est *maximale* en H où $\mathscr{E}_p$ est minimale.

Entre H et B, de l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle. La vitesse du point matériel étant nulle en B (point d'*arrêt*), il *rebrousse chemin* et parcourt $[B, H, A]$ en sens inverse, ... en l'absence de frottements.

On dit que le point matériel se trouve dans un *état lié*.

Ce point matériel décrit le chemin $[A, H, B]$ pendant une demi-période, et retrouve sa position initiale au bout d'une *période* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}}$.