

# DM PFD-Énergie

**Règle du jeu :** Chacun doit faire et rendre, rédigé (mais avec le minimum de mots!), l'exercice qui lui est assigné, avant le 13/2 inclus.

Vous pouvez en faire davantage, et m'en rendre un deuxième.

Des exos sont très similaires, n'en faites qu'un!

Je suis disponible pour donner des indications si besoin, vous pouvez vous aider les uns les autres. Je vous rappelle par contre que l'insertion professionnelle des moines copistes est délicate de nos jours et que je ne suis pas totalement stupide...

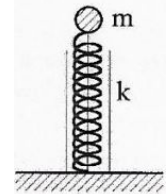
Jules Almes-Corget	2	Alenas Belkaid	11	Mathias Bouchamma	3	Ethan Brocque	6,10
Anaëlle Bruhat	10	Enzo Chaille	8	Louison Chazaud	9	Raphaël Cuquemelle	11
Eileen Curnier	10	Hugo De Beaurepaire	1	Lila Dervyn	3	Tom Dulibeaud	8
Fatine Elbahoua	1	Valentin Escudier	9	Beatrix Eysseric	1	Lisa Fily	7
Bastian Frazier	5	Antonin Gautier	11	Maxime Gordon	9	Delphine Granier	8
Nathan Hamy	7	Lou-Jane Hartmann-Augé	2	Margot Huet	11	Thomas Kiffer	2
John Korie	2	Circée Labare	2	Julie Leibenguth	3	Gregoire Lenay	4
Julie Lopez	1	Julia Mathieu	1	Clara Meurant	10	Louis Niel	4
Tom Nivaggioni	11	Lily Obernesser	1	Jason Perrier	1,5	Samuel Pignol	10
Emilie Rapin	2	Raphaëlle Rodriguez	7	Fédèle Romain	8	T. Roulleau De La Roussière	10,6
Marie Sacilotto	9	Pierre Sohier	8	Fayçal Taallah	5	Lison Tabardel	8
Mathis Toppan	8	Raphael Vaglio	9				

## 1 \* Masse posée sur un ressort : condition de décollage

Un objet de masse  $m$  que l'on assimile à son centre d'inertie est posé sur un ressort de constante de raideur  $k$  maintenu vertical.

1 - On comprime le ressort d'une longueur  $a$  et on l'abandonne sans vitesse initiale. Établir l'équation horaire du centre d'inertie de l'objet et donner la période des oscillations lorsque celui-ci reste posé sur le ressort.

2 - Calculer la longueur  $a$  minimale à imposer au ressort pour que la masse décolle.



**Rép :** On peut poser  $X = x - x_e$  d'où  $X = -a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$ ;  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ;  $a_{\min} = \frac{mg}{k}$

## 2 \* Bille dans une glissière : des savoir-faire basiques en pfd et énergie

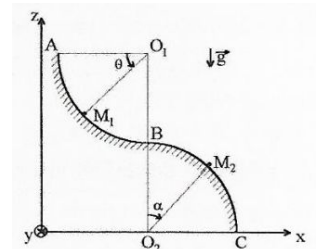
On considère une surface formée de deux quarts de cylindre de rayon  $r$  reliés l'un à l'autre.

Un point matériel de masse  $m$  est abandonné sans vitesse initiale à la partie supérieure  $A$  et peut glisser sans frottement sur cette surface. Sur la partie (1) la position du mobile est repérée par  $\widehat{AO_1M_1} = \theta$  et sur la partie (2) par  $\widehat{BO_2M_2} = \alpha$ .

1 - Le mobile étant sur la partie (1) de cette piste expliquer pourquoi le mouvement est plan. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique, projeter cette relation sur l'axe tangent, en déduire l'expression de la vitesse angulaire en  $M_1$  puis les caractéristiques du vecteur vitesse en  $B$ .

2 - Le mobile étant maintenant sur la partie (2), projeter la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe tangent et sur l'axe normal; en déduire la valeur de la vitesse du point matériel en  $M_2$  puis l'intensité de la réaction normale de la piste en ce point.

3 - Montrer que le mobile quitte la piste en une position que l'on précisera.



**Rép :**  $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}} \sin \theta$ ;  $v_B = \sqrt{2gr}$ ;  $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}(2 - \cos \alpha)}$ ;  $N = mg(3 \cos \alpha - 4)$ ;

## 3 \* Masse attachée à un fil : très proche de l'exo précédent

Un point matériel de masse  $m$  est relié à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse de longueur  $\ell$ . A partir de sa position d'équilibre on lui impose latéralement une vitesse initiale  $v_0$  telle que  $v_0^2 = 3g\ell$  de façon à communiquer un mouvement circulaire dans un plan vertical.

1 - Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au point matériel dans une position quelconque définie par  $\theta$ .

2 - En projetant la relation obtenue sur la tangente et en intégrant exprimer la vitesse en fonction de  $\theta$ . Retrouver ce résultat par une méthode énergétique.

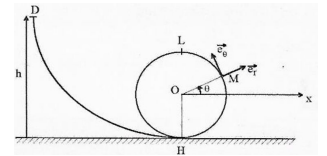
3 - En projetant la relation fondamentale sur la normale au mouvement exprimer la tension du fil.

4 - Comment évolue le mouvement de la masse?

**Rép :**  $v = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell(1 - \cos \theta)} = \sqrt{g\ell(1 + 2\cos \theta)}$ ;  $T = mg(1 + 3\cos \theta)$ . La vitesse s'annule pour  $\cos \theta_1 = -\frac{1}{2}$ ; La tension s'annule pour  $\cos \theta_2 = -\frac{1}{3}$

#### 4 \* Looping ? : très proche des deux précédents

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  glisse sans frottement dans une gouttière DHL. Le point  $M$  est abandonné sans vitesse initiale au point  $D$  d'altitude  $h$ ; il arrive donc en  $H$  avec une vitesse d'intensité  $\sqrt{2gh}$ . On appelle  $a$  le rayon de la piste circulaire.



1 - Soit  $\vec{N}$  la réaction de la gouttière, écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel  $M$  dans une position repérée par l'angle  $\theta$  sur la piste circulaire. Projeter cette relation vectorielle sur les axes de vecteurs unitaires  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ .

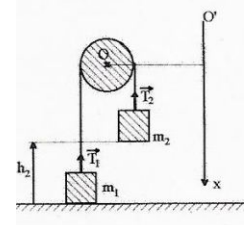
2 - Choisir astucieusement l'une des deux relations obtenues, l'intégrer pour obtenir l'expression  $N(\theta)$ .

3 - En déduire la valeur minimale de  $h$  pour que le contact persiste quelque soit  $\theta$ .

**Rép :**  $\frac{1}{2}a\theta^2 = -g \sin \theta + g \left(\frac{h}{a} - 1\right)$ ;  $N = mg(-3 \sin \theta + \frac{2h}{a} - 2)$ ;  $h > \frac{5}{2}a$ .

#### 5 \* Deux masses et une poulie : jonglage entre les systèmes (proche de l'exo du TD)

On considère le dispositif ci-dessous, les deux masses  $M_1(m_1)$  et  $M_2(m_2)$  sont reliées par un fil souple inextensible ne glissant pas sur la poulie. On donne  $m_2 > m_1$  et on choisit un axe  $O'x$  orienté vers le bas. A l'instant pris comme origine des temps la masse  $M_1$  décolle du sol avec une vitesse nulle, la masse  $M_2$  est à l'altitude  $h_2$ .



1 - En négligeant l'inertie de la poulie (on admet alors que  $T_1 = T_2$ ) établir les expressions des accélérations des masses  $M_1$  et  $M_2$ .

2 - A quelle date le mouvement s'arrête-t-il ?

Déterminer alors la vitesse de chacune des masses.

**Rép :** 1.  $\gamma_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$ ;  $\gamma_1 = -\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$  2.  $t = \sqrt{\frac{2h_2}{\gamma_2}} = \sqrt{\frac{2h_2(m_1 + m_2)}{(m_2 - m_1)g}}$   $v_2 = \sqrt{\gamma_2 h_2}$ ;  $v_1 = -\sqrt{2\gamma_2 h_2}$

#### 6 \*\*\* Frottements quadratiques : des maths

Un point matériel de masse  $m$  est lancé verticalement vers le haut à l'altitude  $z = 0$  avec une vitesse initiale  $v_0$ . L'ensemble des frottements qui s'exercent sur lui est équivalent à une force antagoniste au déplacement d'expression  $-kv^2$ . On admet que le champ de pesanteur est uniforme et de valeur  $g$ .

1 - En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir la loi de la vitesse en fonction du temps lors de la montée du projectile. En déduire la durée de cette phase.

Indication : séparer les variables dans le PFD, faire apparaître la dérivée de  $\arctan(u)$ ,  $u$  fonction à déterminer

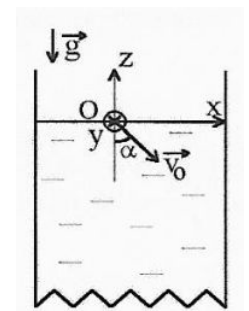
2 - Établir l'expression de l'altitude en fonction de la vitesse (On pourra montrer que  $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dz}$ ). Quelle est l'altitude maximale atteinte ?

3 - Calculer la vitesse  $v_1$  du point matériel lorsqu'il retombera sur le sol.

**Rép :**  $t = \sqrt{\frac{m}{kg}} \left( \text{Arctan} \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0 - \text{Arctan} \sqrt{\frac{k}{mg}} v \right)$ ;  $t_1 = \sqrt{\frac{m}{kg}} \text{Arctan} \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0$ ;  $z = \frac{m}{2k} \ln \frac{1 + \frac{k}{mg} v_0^2}{1 + \frac{k}{mg} v^2}$ ;  $z_m = \frac{m}{2k} \ln \left( 1 + \frac{k}{mg} v_0^2 \right)$ ;  $v_2 = \frac{-v_0}{\sqrt{1 + \frac{k}{mg} v_0^2}}$

#### 7 \*\* Bille dans un fluide : poussée d'Archimède et équadif d'ordre 1

Une bille sphérique de rayon  $r$  (faible) et de masse  $m$  arrive obliquement à la date  $t = 0$  dans un liquide immobile avec une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec la verticale. Elle est soumise à la force de pesanteur, à la poussée d'Archimède et à une force de frottement d'expression  $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$  où  $\eta$  est le coefficient de viscosité du liquide.  $\mu_1$  est la masse volumique du liquide et  $\mu$  celle du solide homogène.



1 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique établir les expressions des composantes du vecteur vitesse.

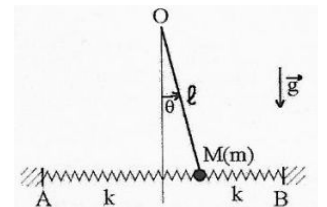
2 - Donner les équations horaires du mobile en posant  $\beta = \frac{9\eta}{2r^2\mu}$ .

3 - Comment se comporte la vitesse au bout d'un temps suffisamment long ? Que dire alors du mouvement ?

**Rép :**  $v_x = v_0 \sin \alpha e^{-\frac{9}{2} \frac{\eta}{r^2 \mu} t}$   $v_z = -\frac{2}{9} \frac{r^2}{\eta} (\mu - \mu_1) g \left( 1 - e^{-\frac{9}{2} \frac{\eta}{r^2 \mu} t} \right) - v_0 \cos \alpha e^{-\frac{9}{2} \frac{\eta}{r^2 \mu} t}$ ;  $x = \frac{v_0 \sin \alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$ ;  $z = -\frac{(\mu - \mu_1)g}{\beta \mu} \left( t + \frac{e^{-\beta t} - 1}{\beta} \right) + \frac{v_0 \cos \alpha}{\beta} (e^{-\beta t} - 1)$

#### 8 \*\* Pendule attaché à deux ressorts : développements limités

On considère un pendule constitué d'une tige de longueur  $\ell$  rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe  $\Delta$  passant par son extrémité supérieure  $O$ . A l'extrémité inférieure  $M$  est fixée une masse  $m$  que l'on suppose ponctuelle. Par ailleurs ce point  $M$  est relié à deux ressorts identiques ( $k, \ell_0$ ) eux mêmes accrochés à des points symétriques  $A$  et  $B$  de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige  $OM$  est selon la direction verticale.



On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre.

En appliquant au choix : le PFD, l'énergie ou le théorème du moment cinétique au point matériel  $M$  montrer que le mouvement est harmonique, donner l'expression de la période des petites oscillations.

On rappelle que  $\cos x \simeq 1 + x^2/2$  au voisinage de  $x = 0$

**Rép :**  $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0$ ;  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}}$

**9 \*\*Oscillateur : développements limités, projections**

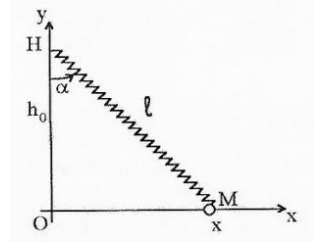
Un point matériel  $M$  de masse  $m$  glisse sans frottement sur un axe horizontal  $Ox$ . Ce point est lié à un ressort de longueur à vide  $\ell_0$ , de raideur  $k$ , accroché à un point  $H$  tel que  $OH = h_0 < \ell_0$ .

A l'instant initial on lâche le point matériel  $M$  sans vitesse à partir d'une position proche de la position d'équilibre.

1 - Faire un bilan des forces exercées sur le point  $M$ , on écrira l'expression de la tension du ressort en fonction de  $k, x, \ell$  et  $\ell_0$ .

2 - Par projection de la relation fondamentale, établir l'équation différentielle du mouvement de  $M$  sur  $Ox$ . La retrouver énergétiquement.

3 - A quelle condition les oscillations sont-elles harmoniques (sinusoïdales)? En donner alors l'expression de la période.



**Rép :**  $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}\right) = 0$ ;  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell}{k(\ell - \ell_0)}}$

**10 \*\*\* Équilibre stable ou instable : étude d'un profil énergétique**

Soit un référentiel galiléen  $\mathcal{A}_g$  de repère  $(OX, Oy, Oz)$  de vecteurs unitaires  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ . Une perle quasi ponctuelle  $P$ , de masse  $M$ , est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle  $(C)$ , de rayon  $a$ . Le point  $P$  est attaché à un ressort  $(R)$  dont l'autre extrémité est fixée en  $O'$  ( $OO' = a$ ),

Le ressort  $(R)$  possède une constante de raideur  $k$  et une longueur au repos  $\ell_0$ . Le point  $P$  est repéré par l'angle  $(Ox, OP) = \theta$

1.a) Exprimer  $\vec{OP}$  en fonction de  $a$  et  $\theta$  dans la base polaire  $(\vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{a}, \vec{u}_\theta)$ . En déduire l'expression du module  $O'P$ .

b) Exprimer la tension  $\tilde{\tau}$  du ressort en fonction de  $a, k, \ell_0$  et  $\theta/2$  dans la base  $(\vec{u}_n, \vec{u}_\theta)$ .

2. a) Comment s'exprime la vitesse  $\vec{v}$  de  $P$  dans  $\mathcal{R}_g$  en utilisant la base de projection  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ?

b) On note  $\vec{F}$  la résultante des forces exercées sur la perle  $P$ .

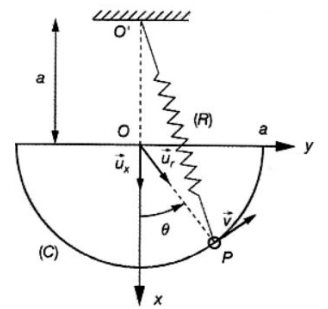
Donner l'expression de  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ . En déduire l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  (à une constante près) dont dérive la force  $\vec{F}$ .

3. a) On suppose les relations suivantes entre les paramètres :

$$a = \frac{2Mg}{k} \quad \text{et} \quad \ell_0 = \sqrt{3} \left( a - \frac{Mg}{k} \right).$$

Quelles sont les positions d'équilibre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  pour  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ?

b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.



**Rép :**  $O'P = 2a \cos \frac{\theta}{2}$ ;  $\vec{T} = -k(2a \cos \frac{\theta}{2} - \ell_0) (\cos \frac{\theta}{2} \vec{u}_r - \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}_\theta)$ ;  $\mathcal{E}_p = (-Mga + ka^2) \cos \theta - 2k\ell_0 a \cos \frac{\theta}{2} + C$ ;  $\theta_1 = 0$  (instable)  $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$  (stable)

**11 \*\* Tunnel terrestre : équation du mouvement par l'énergie**

On démontre que, pour tout point  $M$  de masse  $m$ , situé à l'intérieur de la Terre, à la distance  $r$  du centre  $C$  de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :

$$\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r \quad (R : \text{rayon de la Terre}, \quad r = CM, \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{CM}}{CM})$$

Données numériques :  $R = 6,410^6$  m;  $g_0 = 10$  m · s<sup>-2</sup>.

a) On considère un tunnel rectiligne  $AB$ , d'axe  $Hx$  ne passant pas par  $C$  et traversant la Terre. On note  $d$  la distance  $CH$  du tunnel au centre de la Terre.

Un véhicule, assimilé à un point matériel  $M$  (masse  $m$ ), glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part du point  $A$  de la surface terrestre, sans vitesse initiale. Le point  $M$  étant en mouvement unidirectionnel, son énergie potentielle de gravitation  $\mathcal{E}_p(x)$  est définie par :

$$d\mathcal{E}_p = -\vec{f} \cdot dx \vec{u}_x$$

- Quelle est l'expression de  $\mathcal{E}_p(x)$  sachant que  $\mathcal{E}_p = \frac{mg_0 R}{2}$  au point  $A$ ?

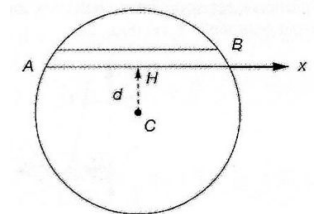
- Quelle est sa vitesse maximale  $v_m$  au cours de son mouvement?

Calculer  $v_m$  sachant que  $d = 510^6$  m.

b) Exprimer  $\overline{HM} = x$  en fonction du temps  $t$  par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de  $v_m$ .

c) Représenter et commenter le graphe de  $\mathcal{E}_p(x)$ ,  $\mathcal{E}_p$  étant l'énergie potentielle de gravitation du point matériel  $M$ .

Décrire le mouvement du point  $M$  à partir de sa position initiale (en  $A$ ).



**Rép :**  $\mathcal{E}_p(x) = \frac{mg_0}{2R} (x^2 + d^2)$ ;  $v_m = \sqrt{g_0 \left(R - \frac{d^2}{R}\right)} = 510^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$ ;  $v_m = \omega\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{g_0 \left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$ ;  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$