

Quelques révisions et de bonnes vacances !

1 CAPTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse), ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications.

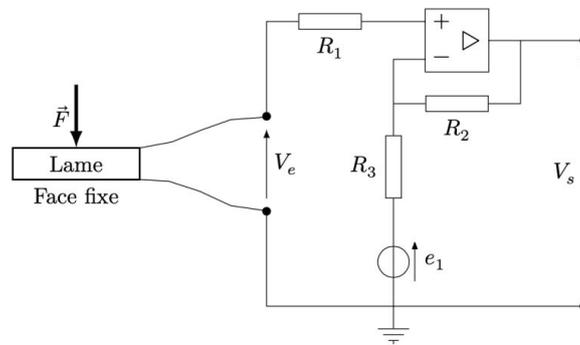
A. Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

Les montages ci-après utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire. On suppose qu'une force \vec{F} régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entraînant l'apparition d'une tension V_e à ses bornes et de deux charges opposées $+q$ et $-q$ sur les faces de la lame. La charge q est liée à V_e ainsi qu'à la force \vec{F} exercée de sorte que

$$q = CV_e = KF$$

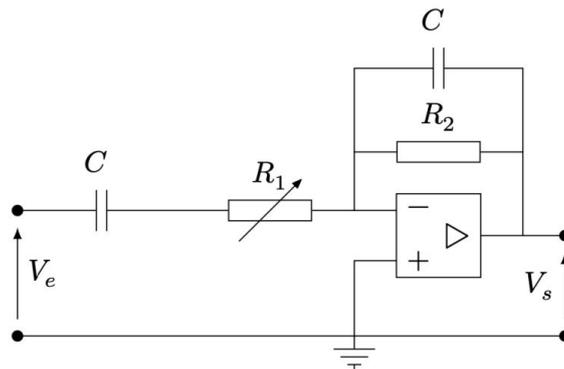
où C , K et F représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et l'intensité de la force \vec{F} .

1. Exprimer la tension V_e en fonction de e_1 , V_s et des différentes résistances.
2. On donne : $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 6.5\text{k}\Omega$, $R_3 = 1.0\text{k}\Omega$ et $e_1 = 100\text{mV}$. On mesure $V_s = 6.50\text{ V}$. En déduire V_e .
3. Sachant que $C = 8.0 \times 10^{-13}\text{ F}$ et que $K = 1.0 \times 10^{-12}\text{CN}^{-1}$, déterminer l'intensité de la force \vec{F} s'exerçant sur la lame.



B. Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence f , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage ci-dessous.



1. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre de la figure 2. La mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{A}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)}$$

en précisant les expressions de A , ω_1 et ω_2 en fonction de R_1 , R_2 , C .

2. Indiquer quelle est la nature de ce filtre. Justifier.
3. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation ω que l'on exprimera en fonction de ω_1 et ω_2 .
On ajuste à présent la résistance R_1 de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.
4. Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération et la méthode utilisée.
5. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que $R_2 = 1.0 \times 10^2\text{k}\Omega$, $C = 25\text{nF}$ et qu'il a fallu régler R_1 à $10\text{k}\Omega$ de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

2 REBOND D'UNE GOUTTE D'EAU

Il est possible de réaliser par traitement chimique d'une plaque métallique une surface plane parfaitement hydrophobe : une goutte d'eau posée sur cette surface n'y est en contact qu'en un seul point et on constate qu'elle adopte une forme sphérique si elle est suffisamment petite (observation O1).

Lorsqu'on lâche une goutte sphérique de rayon $a_0 \simeq 1.0$ mm sans vitesse initiale à une hauteur $h = 10$ cm au-dessus de la plaque supposée horizontale et qu'on filme avec une caméra rapide, on constate que la goutte reste au contact du plan hydrophobe pendant une durée τ de l'ordre de quelques millisecondes (observation O2). Pendant cette phase, la goutte s'aplatit puis s'arrondit avant de décoller.

Une fois qu'elle a décollé, la goutte qui a récupéré sa forme sphérique remonte jusqu'à une altitude maximale inférieure à h avant de retomber. Le processus se répète ensuite avec cinq à dix rebonds perceptibles (observation O3).

Le but du problème est de proposer des modèles simples tentant d'interpréter ces observations.

Données numériques :

- masse volumique de l'eau $\rho_e = 1,0$ kg/L ;
- coefficient de tension superficielle entre l'air et l'eau : $A = 7,0 \times 10^{-2}$ J/m² ;
- rayon de la goutte considérée : $a_0 = 1,0$ mm ;
- hauteur depuis laquelle les gouttes sont lâchées : $h = 10$ cm ;
- champ de pesanteur terrestre $g = 9,8$ m/s².

1 Forme des gouttes

Dans toute cette partie, la goutte est supposée au repos. Pour faciliter les calculs, on adopte une géométrie différente de la réalité en considérant la goutte cylindrique de rayon a et de hauteur e .

Du fait que le contact avec la goutte réelle est ponctuel, on admet que, dans le modèle cylindrique, toute la surface du cylindre (y compris sa base) est en contact avec l'air. L'expérience montre que les interactions entre l'eau et l'air sont associées à une énergie potentielle de la forme

$$E_{p,t} = AS$$

où S est l'aire de l'interface eau-air et A une constante positive appelée coefficient de tension superficielle.

A. Rôle de la tension superficielle Dans cette partie, on néglige la pesanteur.

1. Exprimer le volume V de la goutte cylindrique et sa surface totale de contact avec l'air S en fonction de a et e .
2. En déduire son énergie potentielle de tension superficielle en fonction de a , A et V .
3. Montrer que, pour V et A fixés, la valeur a_0 de a pour laquelle $E_{p,t}$ passe par un minimum est

$$a_0 = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3}$$

4. Vérifier que la valeur correspondante de l'épaisseur de la goutte est $e_0 = 2a_0$ et commenter.
5. En déduire l'expression du minimum de l'énergie potentielle en fonction de A et a_0 .
6. Donner des expressions approchées de $E_{p,t}(a)$ lorsque $a \rightarrow 0$ et lorsque $a \rightarrow \infty$. Tracer l'allure du graphe de $E_{p,t}$ en fonction de a .
7. Déterminer, pour V et A fixés, l'expression de $\frac{d^2 E_{p,t}}{da^2}(a_0)$ en fonction de A . En déduire qu'au voisinage de $a = a_0$, on peut mettre, à une constante additive près, l'énergie potentielle de tension superficielle sous une forme analogue à l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 et de longueur a avec

$$k = 12\pi A \quad \text{et} \quad l_0 = a_0$$

B. Influence de la pesanteur

Dans cette partie, on prend en compte la pesanteur. On prend l'origine des énergies potentielles de pesanteur à la base de la goutte de telle sorte que les cotes de ses faces inférieure et supérieure soient respectivement $z = 0$ et $z = e$. On fait l'hypothèse que l'énergie potentielle de pesanteur modifie très peu la valeur a_0 de a qui rend minimale l'énergie potentielle totale de la goutte. On supposera notamment que la relation entre V et a_0 obtenue à la question A. 11 reste vraie.

1. Redonner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur pour une altitude z du centre de gravité de la goutte.
2. Montrer que la masse m de la goutte est donnée par $m = 2\pi\rho_e a_0^3$.
3. Sachant que $z = \frac{e}{2}$ et sous les hypothèses énoncés précédemment, montrer que l'énergie potentielle de pesanteur de la goutte s'écrit :

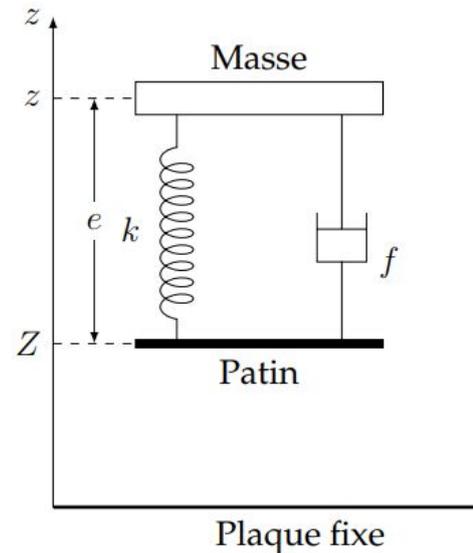
$$E_{p,g} = \frac{2\pi\rho_e g a_0^6}{a^2}$$

On note a_1 la valeur qui rend minimale l'énergie potentielle totale de la goutte.

4. Déterminer l'équation satisfaite par a_1 .
5. Comme on suppose que la pesanteur ne modifie que très peu la valeur de a qui rend l'énergie potentielle totale minimale, on note $a_1 = a_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. Déterminer, à l'ordre 1, l'expression de ε en fonction de a_0, ρ_e, g et A . On rappelle que pour $\varepsilon \ll 1$, à l'ordre 1, on a $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$.
6. Interpréter le signe de ε .
7. Calculer la valeur numérique de ε . Le résultat est-il cohérent avec l'hypothèse $\varepsilon \ll 1$?

2 Modèle mécanique du rebond de la goutte

L'analyse de la partie 1 conduit à modéliser la tendance d'une goutte à reprendre une forme sphérique par un ressort de raideur k . Pour prendre en compte par ailleurs l'inertie de la goutte et d'inévitables frottements internes, on adopte le modèle de la figure suivante : on attache sous une masse ponctuelle $m = 6,3\text{mg}$ un patin (P) plan, de masse nulle via un ressort de raideur $k = 2,6\text{ N/m}$ et de longueur à vide e_0 et un amortisseur qui exerce sur m une force de la forme $\vec{F} = -f\dot{e}\vec{e}_z$ où e est la distance entre la masse m et le patin. Le ressort et l'amortisseur sont montés en parallèle. On néglige la masse du ressort et la masse de l'amortisseur. Dans ce modèle, toute la masse de la goutte est concentrée en son sommet. À chaque instant t , on repère les mouvements du système par la cote $z(t)$ de la masse m et par la cote $Z(t)$ du patin (P), la cote nulle étant prise sur la plaque fixe. Le système est abandonné avec les conditions initiales $z(0) = h + e_0$, $\dot{z}(0) = 0$, $e(0) = e_0$ et $\dot{e}(0) = 0$. On néglige les forces exercées par l'air.



1. En considérant que la goutte est en chute libre et que $e(t)$ reste constamment égal à e_0 , déterminer en fonction de h et g , l'expression du module de la vitesse $v_0 = |\dot{z}(t_0)|$ de la masse m à l'instant t_0 où le patin touche la plaque de cote $z = 0$. Calculer numériquement v_0 .

On fixe désormais l'origine des temps $t = 0$ au moment où le patin touche la plaque. Du fait de sa masse nulle, sa vitesse devient instantanément nulle. On repère alors l'évolution de l'épaisseur $e(t)$ avec les conditions initiales $e(0) = e_0$ et $\dot{e}(0) = -v_0$. Dans toute la suite du problème, on considère que le poids de la goutte est négligeable devant toutes les autres forces en jeu.

2. On suppose que le patin reste au contact de la plaque. Montrer que l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\delta(t) = e(t) - e_0$ se met sous la forme :

$$\ddot{\delta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\delta} + \omega_0^2\delta = 0$$

où l'on exprimera les constantes positives ω_0 et Q en fonction de m , k et f .

3. On suppose $Q^2 \gg 1$. En déduire que la solution générale est de la forme :

$$\delta(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) (B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t))$$

et déterminer les expressions des constantes B et C en fonction de v_0 et ω_0 .

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la suite des instants correspondant aux maxima successifs de $\delta(t)$. On admet que les oscillations de $\delta(t)$ sont perceptibles tant que leur amplitude $\delta(T_n)$ reste supérieure ou égale à 10% de la valeur initiale $\delta(T_0)$. Exprimer le nombre d'oscillations perceptibles en fonction de Q . Combien peut-on en observer si $Q = 5$? On conservera cette valeur de Q pour la suite. On s'intéresse désormais à la possibilité de décollement du patin. On note $\vec{R} = R\vec{e}_z$ l'action de contact exercée par la plaque fixe sur le patin.

5. Établir l'expression de R en fonction de k , f , δ et $\dot{\delta}$.

6. En limitant les calculs à l'ordre 1 en $1/Q$, montrer que

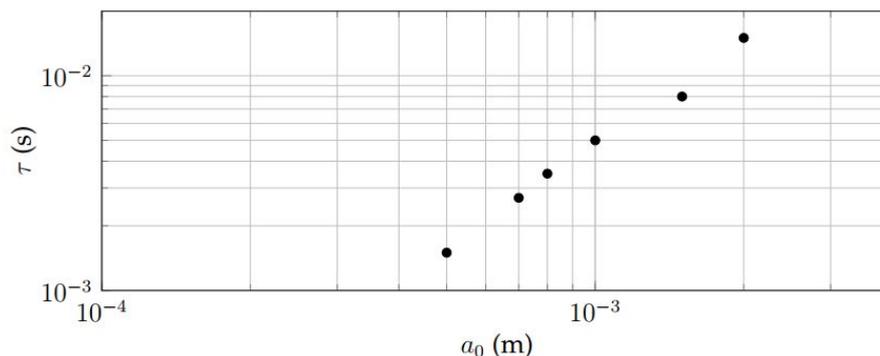
$$R = m\omega_0 v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 t)\right)$$

7. Déterminer l'instant $\tau > 0$ où le patin décolle. Calculer sa valeur. Le modèle est-il en accord avec les observations ?

8. On néglige le terme $1/Q$ dans l'expression de τ . En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que le modèle prévoit que l'évolution de τ en fonction de a_0 est donnée par

$$\log(\tau) = \text{constante} + \frac{3}{2} \log(a_0)$$

9. Une étude expérimentale sur des gouttes dont les rayons sont compris entre 0,5 mm et 2 mm a permis de tracer le graphe suivant :

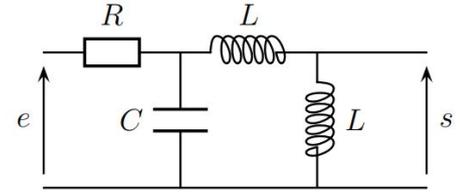


Cette expérience valide-t-elle le modèle étudié ici ?

3 III. FILTRE DE HARTLEY

On étudie le filtre de Hartley représenté ci-contre utilisé en sortie ouverte avec $L = 1,0\text{mH}$, $C = 0,10\mu\text{F}$ et $R = 10\text{k}\Omega$. Sa fonction de transfert en sortie ouverte s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + 2j\frac{L}{R}\omega + 2LC(j\omega)^2}$$



Données numériques : $\sqrt{2} = 1,4142$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$, $\log 2 = 0,3010$, $10^{-2.5} = 3 \cdot 10^{-3}$

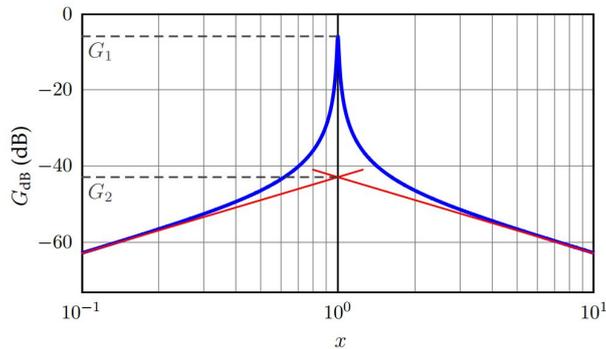
1. Prévoir à l'aide de schémas équivalents la nature probable du filtre. Justifier précisément.

2. On donne la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = H_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

en notant $x = \omega/\omega_0$. Exprimer la pulsation propre ω_0 , le facteur de qualité Q et le gain H_0 en fonction de R , L et C et calculer leurs valeurs numériques.

3. Le diagramme de Bode en gain du filtre est donné ci dessous :



(a) Mesurer la pente des asymptotes sur le diagramme en expliquant votre mesure.

(b) Déterminer la pente à l'aide de l'étude de la fonction de transfert. Est-ce cohérent avec la question précédente ?

(c) Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase en déterminant sa valeur en $x = 1$ et dans les limites $x \ll 1$ et $x \gg 1$.

(d) Déterminer les valeurs de G_1 et G_2 définis sur le diagramme de Bode à partir de la fonction de transfert en fonction de H_0 , Q , ω_0 . Faire l'application numérique et vérifier la cohérence avec les valeurs lues sur le diagramme.

4. Ce quadripôle peut-il servir d'intégrateur ? de dérivateur ? Si oui, pour quelle bande de fréquence ? Justifier. Quel inconvénient présente néanmoins ce montage pour réaliser ces fonctions ? 5. On étudie le signal de sortie $s_1(t)$ lorsque l'on applique en entrée du filtre le signal

$$e_1(t) = E_0 + E_{1m} \cos(\omega_1 t) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \omega_0$$

Déterminer l'expression du signal de sortie $s_1(t)$. 6. On applique maintenant un signal créneau $e_2(t)$ de pulsation $\omega_2 = \omega_0/3$ et d'amplitude $E_{2m} = 1\text{ V}$, voir figure 2. Ce signal est décomposable en série de Fourier par

$$e_2(t) = \frac{4}{\pi} E_{2m} \left[\sin(\omega_2 t) - \frac{1}{3} \sin(3\omega_2 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_2 t) - \frac{1}{7} \sin(7\omega_2 t) + \dots \right]$$

(a) Tracer l'allure du spectre d'amplitude de $e_2(t)$. Préciser les valeurs numériques des pulsations des trois premiers pics d'amplitudes non nulles. (b) En utilisant le diagramme de Bode en gain, figure 1, calculer les valeurs numériques des amplitudes de ces pics dans le signal de sortie s_2 . (c) En déduire l'expression approchée du signal de sortie $s_2(t)$.

Corrigé

CAPTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

I.A.1. On observe que $i_+ = 0$ donc $V_e = V_+$. De même, on peut appliquer un pont diviseur de tension avec les deux résistors R_3 et R_2

$$U_{R3} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} (V_s - e_1)$$

Au final, on a aussi $V_- = 0 + e_1 + U_{R3}$. On obtient alors en combinant ces résultats sachant que $V_+ = V_-$

$$V_e = e_1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3} (V_s - e_1) = \boxed{\frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}}$$

On peut retrouver le même résultat en appliquant le théorème de Millman ou une loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse puis à l'entrée non inverseuse. LNTP :

$$\frac{e_1 - V_-}{R_3} + \frac{V_s - V_-}{R_2} = 0 \Rightarrow V_- = \frac{\frac{e_1}{R_3} + \frac{V_s}{R_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}}$$

2. Application numérique : $V_e = 0,95$ V

3. Application numérique : $F = 0,76$ N

B. 1. On nomme $Z_1 = R_1 + 1/jC\omega$ l'impédance du bloc de gauche et $1/Z_2 = 1/R_2 + jC\omega$ l'admittance du bloc de droite. En appliquant la LNTP à l'entrée -, on obtient : $\frac{V_e - V_-}{Z_1} + \frac{V_s - V_-}{Z_2} = 0$, d'où, sachant que $V_- = V_+ = 0$:

$$V_+ = V_- = 0 = \frac{\frac{V_e}{Z_1} + \frac{V_s}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

On obtient après calculs :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{1 + j \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \omega - \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \omega}$$

On en déduit par identification que

$$A = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \omega_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2) C}$$

On obtient le même résultat en appliquant la loi des nœuds en terme de potentiels.

2. Avec les schémas équivalents, on voit que à la fois en basse et haute fréquence $G \rightarrow 0$. On peut donc supposer que c'est un filtre passe-bande. Puisque l'on a calculé la fonction de transfert avant, on peut aussi faire les limites

3. Le gain (module de la fonction de transfert) passe par un maximum lorsque son dénominateur est minimal (car le numérateur est constant !) soit lorsque $\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

4. On peut utiliser un oscilloscope double voies en mode XY. Les deux signaux sont en opposition de phase lorsque l'on obtient une droite de pente -1.

5. On a une sortie en opposition de phase avec l'entrée si \underline{H} est un réel négatif, soit si $\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = 0$. La condition est la même que pour le maximum et on n'a donc pas à refaire les calculs, c'est en $\omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$. L'application numérique donne $\omega \simeq 1264$ rad/s lorsque les signaux sont en opposition de phase donc $f \simeq 200$ Hz.

II. REBOND D'UNE GOUTTE D'EAU

A. 1. Le volume de la goutte est $V = \pi a^2 e$. (On en déduit pour la suite $e = \frac{V}{\pi a^2}$ car la variable souhaitée est V et non e) La

surface de la goutte en contact avec l'air est $S = 2\pi a^2 + 2\pi a e$

2. En remplaçant dans l'énergie potentielle, on trouve $E_{p,t} = 2\pi A a^2 + \frac{2AV}{a}$

3. On cherche la valeur a_0 de a pour laquelle la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à a s'annule, on obtient :

$$\frac{dE_{p,t}}{da} = 4\pi a_0 A - \frac{2AV}{a_0^2} = 0 \Leftrightarrow a_0^3 = \frac{V}{2\pi}$$

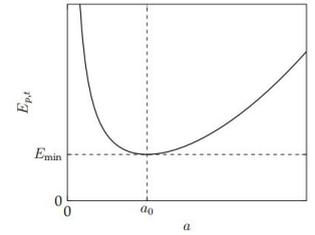
D'où le résultat demandé $a_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$

4. On reprend l'équation 8, avec $V = \pi a_0^2 e_0$ et d'après la question précédente $V = 2\pi a_0^3$ et on obtient en égalisant $e_0 = \frac{2\pi a_0^3}{\pi a_0^2} = 2a_0$

La goutte prend la forme d'un cylindre aussi haut que large, c'est la forme cylindrique qui se rapproche le plus de la sphère qui est la forme géométrique qui possède la surface la plus petite pour un volume donné.

5. On calcule $E_{p,t}(a_0)$, et on obtient

$$E_{\min} = E_{p,t}(a_0) = 2\pi A a_0^2 + \frac{2AV}{a_0}$$



En utilisant (8), on a $\frac{2AV}{a_0} = 4\pi a_0^2 A$ et donc $E_{\min} = 6\pi A a_0^2$

6. Lorsque $a \rightarrow 0$, on a $E_{p,t}(a) \simeq \frac{2AV}{a}$; lorsque $a \rightarrow \infty$: $E_{p,t}(a) \simeq 2\pi A a^2$

On obtient alors l'allure suivante pour $E_{p,t}(a)$:

7. On calcule la dérivée seconde de $E_{p,t}$ par rapport à a . On a

$$\frac{d^2 E_{p,t}}{da^2} = 4\pi A + \frac{4VA}{a^3} \text{ donc } \frac{d^2 E_{p,t}}{da^2}(a_0) = 12\pi A$$

Autour de a_0 , on peut donc approximer l'énergie potentielle de tension superficielle par : $E_{p,t} \simeq E_{p,t}(a_0) + \frac{1}{2} \underbrace{12\pi A}_k (a - a_0)^2$

Et on obtient bien la même forme que l'énergie potentielle d'un ressort de longueur à vide a_0 et de constante de raideur $k = 12\pi A$. (À la constante additive $E_{p,t}(a_0)$ près)

B. 1. L'énergie potentielle de pesanteur est $E_{p,g} = mgz$ où z est l'altitude du centre de gravité de la goutte.

2. La masse de la goutte est $m = \rho_e V$. En notant que $V = \pi a_0^2 e_0$ et que $e_0 = 2a_0$, on obtient $m = 2\pi \rho_e a_0^3$

3. On a $z = \frac{e}{2}$ et $e = \frac{V}{\pi a^2}$. On a déjà montré (question précédente) que $V = 2\pi a_0^3$. Et en utilisant l'expression (17) trouvée pour la masse à la question précédente, on trouve finalement que

$$E_{p,g} = mg \frac{e}{2} = 2\pi \rho_e a_0^3 g \frac{V}{2\pi a^2} = \frac{2\pi \rho_e g a_0^6}{a^2}$$

4. On note $E_p = E_{p,t} + E_{p,g}$ et on cherche a_1 tel que $\frac{dE_{p,t}}{da}(a_1) = 0 = 4\pi A a_1 - \frac{2AV}{a_1^2} - \frac{4\pi \rho_e g a_0^6}{a_1^3}$

5. On remplace a_1 par $a_0(1 + \varepsilon)$ et en faisant les développements limités à l'ordre 1 suivants

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{(a_0(1 + \varepsilon))^2} = a_0^{-2}(1 + \varepsilon)^{-2} \simeq a_0^{-2}(1 - 2\varepsilon) \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_1^3} \simeq a_0^{-3}(1 - 3\varepsilon)$$

$$0 = 4\pi A a_0(1 + \varepsilon) - \frac{2AV}{a_0^2}(1 - 2\varepsilon) - \frac{4\pi \rho_e g a_0^6}{a_0^3}(1 - 3\varepsilon)$$

On obtient l'équation

$$0 = \underbrace{4\pi A a_0 - \frac{2AV}{a_0^2}}_{=0} + \underbrace{(4\pi A a_0 + \frac{4AV}{a_0^2})}_{=8\pi A a_0} \varepsilon + \frac{12\pi \rho_e g a_0^6 \varepsilon}{a_0^3} - \frac{4\pi \rho_e g a_0^6}{a_0^3}$$

$$4\pi \rho_e g a_0^3 = 12\pi a_0 (A + \rho_e g a_0^2) \varepsilon$$

Et finalement

$$\varepsilon = \frac{\rho_e g a_0^2}{3(A + \rho_e g a_0^2)} = \frac{1}{3 \left(1 + \frac{A}{\rho_e g a_0^2} \right)}$$

6. On trouve $\varepsilon > 0$ ce qui est cohérent avec le fait que la goutte s'écrase sous l'effet de la pesanteur, ce qui fait légèrement augmenter son rayon.

7. Avec les valeurs numériques données en début d'énoncé, on trouve $\varepsilon = 0,04$. Ce résultat est plutôt cohérent avec l'approximation $\varepsilon \ll 1$ mais on se trouve à la limite. En fonction de la précision souhaitée sur les résultats, il est possible que cette approximation ne soit pas suffisante.

2.1. La conservation de l'énergie mécanique de la goutte lors de la chute de la goutte (les frottements avec l'air sont négligés et on l'étudie dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen; de plus, lors de la chute la goutte ne se déforme pas, donc le travail des forces intérieures est nul) impose que $E_m(0) = E_m(t_0) \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse située en haut de la goutte dont la cote sur l'axe z est $e(t)$ et la vitesse est $\vec{v} = \dot{e}\vec{e}_z$. Les forces appliquées sont :

- Son poids $\vec{P} = \vec{0}$ (hypothèse);
- La force de frottement $\vec{F} = -f\dot{e}\vec{e}_z$;
- La force de rappel du ressort $\vec{T} = -k(e(t) - e_0)\vec{e}_z$.

Le PFD projeté sur l'axe z donne alors

$$m\ddot{e} = -f\dot{e} - k \underbrace{(e(t) - e_0)}_{\delta}$$

Que l'on peut mettre sous la forme

$$\ddot{\delta} + \frac{f}{m}\dot{\delta} + \frac{k}{m}\delta = 0$$

On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$.

3. La solution générale de cette équation (voir cours) est

$$\delta(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) (B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Comme $Q^2 \gg 1$, on a $\omega \simeq \omega_0$ et on obtient le résultat demandé $\delta(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) (B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t))$

On trouve B et C en utilisant les conditions initiales $\delta(0) = 0$ et $\dot{\delta}(0) = -v_0$, on trouve $B = 0$ et $C = -\frac{v_0}{\omega_0}$ et on a finalement

$$\delta(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t)$$

4. Comme Q est grand, les oscillations sont faiblement amorties, les maxima de $\delta(t)$ sont ceux du sinus et on a $T_n \simeq T_0 + n \frac{2\pi}{\omega_0}$. On a alors

$$\delta(T_n) = \frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 T_0}{2Q} - \frac{2\pi n}{2Q}\right) = \frac{v_0}{\omega_0} \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0 T_0}{2Q}\right)}_{\delta(T_0)} \exp\left(-\frac{n\pi}{Q}\right)$$

On cherche donc n tel que

$$\exp\left(-\frac{n\pi}{Q}\right) = 0.1 \Leftrightarrow n = -\frac{Q}{\pi} \ln(0.1) = \frac{Q}{\pi} \ln(10) \simeq 0.73Q$$

Pour $Q = 5$, on trouve $n \simeq 4$.

5. Comme le patin est fixe sur la plaque dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la somme des forces qui s'appliquent dessus est nulle et on a

$$\vec{R} - \vec{F} - \vec{T} = 0$$

où \vec{F} et \vec{T} sont les forces exercées sur la masse située en haut de la goutte (question 2). On a alors $R\vec{e}_z = -f\dot{\delta}\vec{e}_z - k\delta\vec{e}_z \Leftrightarrow$

$$R = -f\dot{\delta} - k\delta$$

6. On utilise l'expression trouvée à la question précédente de R et l'expression de $\delta(t)$ trouvée à la question 3 pour exprimer R on a :

$$\delta(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t)$$

et

$$\dot{\delta}(t) = -v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \cos(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{v_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t)}_{\text{négligé car } 2Q \text{ fois plus petit que l'autre terme}}$$

En notant d'autre part que $k = m\omega_0^2$ et $f = m\frac{\omega_0}{Q}$, on trouve l'expression demandée :

$$R = m\omega_0 v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 t)\right)$$

7. Le patin décolle lorsque R s'annule pour la première fois, c'est-à-dire, lorsque

$$\sin(\omega_0 \tau) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 \tau) = 0 \Leftrightarrow \tan(\omega_0 \tau) = -\frac{1}{Q}$$

Comme on recherche $\tau > 0$, on doit avoir $\omega_0 \tau = \pi - \arctan\left(\frac{1}{Q}\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{\omega_0} \left(\pi - \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)\right)$

L'application numérique donne $\tau = 4,6$ ms, ce qui est plutôt en accord avec l'observation O2.

Lorsqu'on néglige le terme en $\frac{1}{Q}$ dans l'expression de τ , on trouve

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \left(\frac{2\pi \rho_e a_0^3}{12\pi A}\right)^{1/2} = \pi \sqrt{\frac{\pi \rho_e}{6A}} a_0^{3/2}$$

On obtient bien $\log(\tau) = \text{constante} + \frac{3}{2} \log(a_0)$ On voit que les points expérimentaux sont bien alignés suivant une droite dont on peut calculer le coefficient directeur. On trouve un coefficient directeur de

$$\alpha = \frac{\log(1.5 \times 10^{-2}) - \log(1.5 \times 10^{-3})}{\log(2 \times 10^{-3}) - \log(5 \times 10^{-4})} \simeq 1,7$$

Ce résultat ne semble pas trop différent de la prédiction théorique, mais il faudrait voir avec les barres d'erreurs sur les points de mesure car il n'est pas exclu que la différence entre les deux valeurs soit significative.

III. FILTRE DE HARTLEY

1.- Basses fréquences : s étant la tension aux bornes d'un fil, $s = 0$.

- Hautes fréquences : s étant la tension aux bornes d'un interrupteur ouvert, on ne peut a priori rien dire. Toutefois, u est la tension aux bornes d'un fil donc $u = 0$, de plus s se déduit de u via un pont diviseur de tension d'où $s = 0$.

La nature probable est donc passe-bande

2. L'énoncé donne

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + 2j\frac{L}{R}\omega + 2LC(j\omega)^2} = \frac{\frac{1}{2} \times 2j\frac{L}{R}\omega}{1 - 2LC(\omega)^2 + 2j\frac{L}{R}\omega} \quad \text{et} \quad \underline{H}(jx) = H_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

On commence par identifier le dénominateur et en particulier les termes les plus simples :

- Par identification du terme en ω^2 : $2LC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = 7 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$

- Ensuite, le terme en jx/Q du dénominateur donne $2j\frac{L}{R}\omega = j\frac{\omega}{Q\omega_0}$, soit $Q = \frac{R}{2L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{2L}} = 7 \cdot 10^1$.

- Le numérateur nous donne alors $H_0 = \frac{1}{2}$.

3. (a) On peut voir sur le diagramme que l'asymptote aux BF monte de 20 dB lorsque l'on passe de $x = 10^{-1}$ à 10^0 , soit une pente de +20 dB/dec ; de même en HF, on descend de 20 dB par décade.

(b)

$$\underline{H}(jx) = H_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \Rightarrow G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x) - 20 \log \sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

- Basses fréquences : $x \ll 1$ d'où on peut négliger x^2 par rapport à 1 dans les sommes : $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x) - 20 \log(\sqrt{1}) = \boxed{20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x)}$, on a donc bien une pente de +20 dB/dec : quand x est multiplié par 10, on monte de 20 dB.

- Hautes fréquences : $x \gg 1$ d'où on peut négliger 1 par rapport à x^2 et x^2 par rapport à x^4 . $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x) - 20 \log \sqrt{x^4} = 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log(x/x^2) = \boxed{20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log x}$, on a donc bien une pente de -20 dB/dec : quand x est multiplié par 10, on descend de 20 dB.

On en déduit la phase en basse fréquence $\varphi_{BF}(x) = \frac{\pi}{2}$ et en haute fréquence $\varphi_{HF}(x) = -\frac{\pi}{2}$ (car $H_0 > 0$).

De plus en $x = 1$, $\underline{H} = H_0$, d'où $\varphi(1) = 0$.

(d) • G_1 sur le schéma correspond à la valeur au gain en $x = 1$, soit $G_1 = 20 \log H_0$. Soit numériquement $G_1 = -6$ dB.

• G_2 correspond à l'intersection entre les deux asymptotes en $x = 1$ soit $G_2 = 20 \log(H_0/Q)$ soit numériquement $G_2 = -20 \log 140 = -43$ dB.

4. À basse fréquence, $\underline{H}(jx) \simeq jH_0\frac{x}{Q}$: on a une multiplication par $j\omega$, comportement dérivateur pour $\omega \ll \omega_0$.

À haute fréquence $\underline{H}(jx) \simeq \frac{H_0/Q}{jx}$: on a une division par $j\omega$, le comportement du montage est celui d'un intégrateur pour $\omega \gg \omega_0$.

Toutefois, le filtre atténue fortement le signal compte tenu de son facteur de qualité élevé.

5. Le signal d'entrée présente deux composantes spectrales : une à une fréquence nulle d'amplitude E_0 et une à une fréquence ω_0 d'amplitude E_{1m} .

Compte tenu de la fonction de transfert du filtre, la composante de fréquence nulle est multipliée par 0 ($\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$) et celle de fréquence ω_0 est multipliée par H_0 (pas de déphasage puisque la fonction de transfert est réelle à ω_0). On en déduit

$$\boxed{s_1(t) = 0 \times E_0 + H_0 E_{1m} \cos(\omega_0 t + 0)}$$

On rappelle que si c_n et φ_n sont les amplitudes et les phases du signal d'entrées correspondant aux fréquences f_{n_2} alors

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |H(f_n)| c_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n + \arg(H(f_n)))$$

