Force Centrale

[1] 1) 

M posé sur Terre décrit 1 cercle de rayon $R_T\cos\lambda$ à la vitesse angulaire $\Omega \Rightarrow v_\Omega = \Omega R_T\cos\lambda$

donc $E_B = \frac{1}{2}m(\Omega R_T\cos\lambda)^2 - G\frac{M_T m}{R_T}$

2) PFD sur traj circulaire de rayon R_T parcourue à vitesse uniforme : (1) $m\frac{v^2}{R_T} = \frac{GmM_T}{R_T^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{GmM_T}{2R_T} = E_c$

donc $E_m = \frac{GmM_T}{2R_T} - \frac{GmM_T}{R_T} = -\frac{GmM_T}{2R_T}$

3) A l'équateur, $\cos\lambda = 1$, E_B est max, l'énergie à fournir par la fusée est min

[2] Ellipse de transfert

1) cercle cas 1 : (1) $\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ or $\overbrace{mg_0 = m\frac{GM_T}{R_T^2}}^{\text{2 expressions du poids}}$

$\Rightarrow GM_T = g_0R_T^2$

Donc $\boxed{v_0 = \sqrt{g_0R_T}} \overset{AN}{=} 7{,}9$ km/s.

2) Alors $v_1 = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{r_1}} \underset{\text{tour}}{\overset{\text{sur 1}}{=}} \frac{2\pi r_1}{T_1 \leftarrow 24h} \Longrightarrow g_0R_T^2T_1^2 = 4\pi^2 r_1^3$

$\Rightarrow r_1 = \left(\frac{g_0R_T^2T_1^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \overset{AN}{=} 42.10^3\,\text{km} \Rightarrow v_1 \overset{AN}{=} 3{,}05\,\text{km s}^{-1}$

3) En P, la vitesse doit augmenter pour ↗ Em qui doit être celle de l'ellipse, (de même en A pour acquérir Em du grand cercle). $E_{ellipse} = -\frac{GMm}{2a} = cste = \begin{cases} E_{c_P} - \frac{GMm}{R_T} \\ E_{c_A} - \frac{GMm}{r_1} \end{cases}$

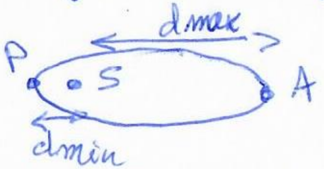
Soit $\frac{1}{2}mv_0'^2 = -GMm\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{R_T}\right) \Rightarrow v_0' = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a}\right)}$

et $v_1' = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)}$

de P à A, le satellite décrit 1/2 ellipse, donc $T_{P\to A} = \frac{T}{2}$

avec (3e loi Kepler) : $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM_T} = \frac{a^3}{g_0R_T^2}$

donc $T_{P\to A} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{g_0R_T^2}} \overset{AN}{=} 3{,}14\sqrt{\frac{[(42\,000+6400)10^3/2]^3}{10\times(6400\,10^3)^2}} = 1{,}8\,10^4\,\text{s} = 5\,\text{h}$

Comète de Haley 1) 

2) 3e loi K : $\left.\frac{T^2}{a^3}\right)_{Halley} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \left.\frac{T^2}{a^3}\right)_{Terre}$ (indep de l'astre autour du soleil)

donc $a_{Halley} = a_{Terre}\left(\frac{T_{Halley}}{T_{Terre}}\right)^{2/3} \overset{AN}{=} 1\,ua\left(\frac{76}{1}\right)^{2/3} = 17{,}9\,ua$

donc $d_{max} = 2a_{Halley} - d_{min} = 35{,}2\,ua$

3) d_{min} correspond à $\theta = \pi$: $d_{min} = \frac{p}{1+e}$

d_{max} —— $\theta = 0$ $d_{max} = \frac{p}{1-e}$

Donc $(1+e)d_{min} = (1-e)d_{max} \Rightarrow e(d_{min}+d_{max}) = d_{max}-d_{min}$

$\Rightarrow e = \frac{d_{max}-d_{min}}{d_{max}+d_{min}} \overset{AN}{=} 0{,}96$

puis $p = d_{min}(1+e) \overset{AN}{=} 1{,}15\,ua$

Expérience de Rutherford

1) $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2eZe}{r^2}\vec{e_r} = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ avec $K = \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0}$, dérive de $-\frac{K}{r} = E_p(r)$

2) Seule force $\vec{F}$ conservative $\Rightarrow E_m = cste = \frac{1}{2}mv_0^2$ (à $t=0$)

3) Seule force $\vec{F}$ centrale $\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = 0$, à $t=0$, $\vec{\sigma_0} = m v b_0 \vec{e_z}$

et $\vec{\sigma_0} = m r^2 \dot{\theta}\vec{e_z}$ ($\vec{OM}\wedge m\vec{v}$ en polaires $\Rightarrow$ cf cours)

4) $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] + \frac{K}{r}$. or $r\dot{\theta} = \frac{\sigma_0}{mr}$,

donc $E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\sigma_0^2}{m^2r^2}\right) + \frac{K}{r} \Rightarrow E_p^*(r) = \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}$

5) Pour $r = r_{min}$, $\dot{r} = 0 \Rightarrow E_m = \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} \Leftrightarrow r^2 E_m - Kr - \frac{\sigma_0^2}{2m} = 0$

eq du 2d degré en r, $\Delta = K^2 + 2\frac{\sigma_0^2 E_m}{m} = K^2 + 2\frac{(m v_0 b_0)^2}{m}\frac{1}{2}mv_0^2$

$= K^2 + (m b_0 v_0^2)^2$

$\Rightarrow r_{min} = \frac{+K+\sqrt{\Delta}}{2E_m} = \frac{K}{mv_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{m b_0 v_0^2}{K}\right)^2}\right]$

Modèle de Bohr

1) $\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\vec{e_r}$, $E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ ($\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$)

2) Traj circulaire, vitesse uniforme, PFD en proj sur $\vec{e_r}$:

$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ et $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}}$

donc $E_m = E_p + E_c = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

3) On a donc $E_m = \frac{E_p}{2}$

4) Mvt circulaire, $L_p = m r_n^2 \dot{\theta}$, or $\dot{\theta} = \frac{v}{r_n} \Rightarrow L_p = m r_n v$

$\Leftrightarrow L_p = \sqrt{\frac{m r_n e^2}{4\pi\varepsilon_0}}$

5) $L_p = n\hbar \Rightarrow r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{me^2}$

6) Donc $E_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$

AN: $E_0 = 2,2\ 10^{-18}$ J (= 13,6 eV)

Freinage dans l'atmosphère

1) Déjà vu, $v = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}$, $E_m = -\frac{G M_T m}{2r}$

2) Résistant, $\frac{dE_m}{dt} < 0$

3) $r \searrow$, trajectoire en spirale

4) Si $r \searrow$ et que la traj reste circulaire $v \nearrow$ $\left(v = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}\right)$
le satellite freiné accélère !

5) a) $\vec{f}$ est opposée à la vitesse $\Rightarrow$ $\underset{1\text{ tour}}{W(\vec{f})} = -f \times 2\pi r$
$= -\alpha m v^2 \times 2\pi r$
$= -\alpha m \frac{G M_T}{\cancel{r}} \times 2\pi \cancel{r}$
$= -2\pi \alpha G M_T m$

$\Rightarrow$ seule force non conservative

Or $\Delta E_m \overset{f}{=} W(\vec{f}) \Rightarrow \boxed{\Delta E_m = -2\pi \alpha G M_T m}$

b) $\Delta E_m = E_{m\,\text{après}} - E_{m\,\text{avant}}$
$= -\frac{G M_T m}{2}\left(\frac{1}{r-\Delta r} - \frac{1}{r}\right) \overset{\text{énoncé}}{=} -G M_T m \frac{\Delta r}{2r^2} \overset{a)}{=} -2\pi \alpha G M_T m$

Donc $\Delta r = 4\pi \alpha r^2 = 82$ cm

c) Perte de Δh en $N = \frac{\Delta h}{\Delta r} = 12\,200$ tours.

or $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{G M_T}} = 5300$ s pour 1 tour

$\Rightarrow$ il faut $NT = 750$ jours.