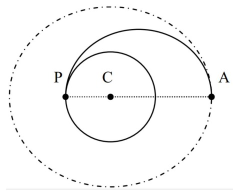
Mouvements dans un champ de force centrale

1 Energie de mise en orbite rasante

Un satellite de masse m, lancé initialement d'un point B du sol terrestre de latitude λ, décrit une orbite circulaire rasante de rayon $\mathrm{r} = \mathrm{R_T}$ (en fait $\mathrm{r} = \mathrm{R} + \mathrm{z}$, avec $\mathrm{z} << \mathrm{R}$). On note Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre .
1) Quelle est l'énergie mécanique initiale E_B du satellite sur la base de lancement dans le référentiel géocentrique ?
2) Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite sur sa trajectoire circulaire.
3) Quel est l'intérêt d'une base de lancement située au voisinage de l'équateur ?

2 Changement d'orbite - Ellipse de transfert

La terre est supposée à symétrie sphérique, de centre C, de rayon $\mathrm{r_0} = 6400$ km. On note $\mathrm{g_0} = 9.8$ m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol.
1) Un satellite, de masse m, décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon R_T. Quelles sont les période $\mathrm{T_0}$ et vitesse $\mathrm{v_0}$ du satellite en orbite circulaire rasante ?
2) Un satellite géostationnaire décrit une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial, et semble fixe pour un observateur terrestre. Déterminer le rayon $\mathrm{r_1}$ de l'orbite d'un satellite géostationnaire. Calculer la vitesse $\mathrm{v_1}$ de ce satellite.



3) On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $\mathrm{r_0} = \mathrm{CP}$ à l'orbite géostationnaire de rayon $\mathrm{r_1} = \mathrm{CA}$. Un moteur permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors une demi ellipse, dite de transfert, de périgée P et d'apogée A.
Déterminer les vitesses v_0' et v_1' du satellite en P et A sur sa trajectoire elliptique.
Calculer la durée du transfert de P à A.

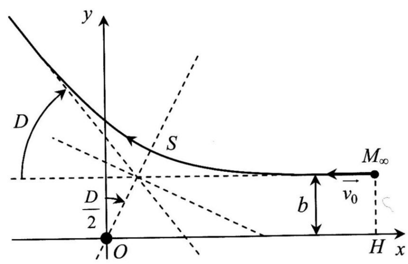
3 Comète de Halley

La comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_{\min} = 0,59$ unités astronomiques (Une unité astronomique correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit $1,5 \cdot 10^{11}$ m)
1 - Faire un schéma de la trajectoire indiquant la position du Soleil et $d_{\min}$.
2 - Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance au Soleil de la comète.
3 - Une conique est décrite par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique.
Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

4 Expérience de Rutherford



Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\vec{e}_x$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z. Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O. Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-contre.
Données : $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1}; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$C; $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$ kg et $Z_{\mathrm{Au}} = 79$.
1 - Exprimer la force électrique subie par la particule α sous la forme $\vec{F} = K/r^2\vec{e}_r$ et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.
2 - Montrer que l'énergie mécanique E_{m} de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.
3 - Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de la particule α en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy), montrer que $\vec{\sigma}_O$ s'exprime de manière simple en fonction de r et $\dot{\theta}$.
4 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^\star(r)$$

5 - On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de E_{m} lorsque $r = r_{\min}$. En déduire

$$r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right]$$

$\boxed{5}$ Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m, charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton $P($ charge $+e)$ qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.
Données : constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s ; vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^{8}$ m $\cdot$ s^{-1}; permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} ; charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$C ; masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-30}$ kg; $1,0$eV $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.
1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.
2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.
3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.
4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.
5 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.
6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}.$$

Calculer numériquement E_0.

$\boxed{6}$ Freinage d'un satellite dans l'atmosphère

On considère un satellite de masse m en orbite basse circulaire de rayon r autour de la Terre de masse M_{T}. Comme le satellite est en orbite basse, il se trouve dans les couches supérieures de l'atmosphère et subit une force de frottement. On suppose ces frottements suffisamment faibles pour que l'orbite reste quasi-circulaire sur un tour.
1 - Retrouver l'expression de la vitesse v du satellite dans le référentiel géocentrique en fonction de G, M_T, r et d'un vecteur, puis celle de son énergie mécanique E_{m} (en fonction de G, M_T, r et m). (Donc dans cette question on néglige les frottements.)
2 - Le travail des forces de frottements est-il moteur ou résistant ? En déduire le signe de $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$
3 - Comment évolue le rayon de l'orbite du satellite au cours du temps ? Tracer l'allure de sa trajectoire dans le référentiel géocentrique.
4 - En déduire comment évolue sa vitesse. Est-ce que ceci était intuitif ?
5 - On suppose que les forces de frottement sont de la forme $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$ avec $\alpha > 0$ une constante estimée à $\alpha = 1,5 \times 10^{-15}$ m^{-1}.
a - On raisonne sur une orbite (un seul tour) du satellite, que l'on peut supposer circulaire uniforme. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique sur cette orbite, et en déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_m pour un tour, en fonction de α, G, m, M_T.
b - (question plus difficile) Utiliser ensuite l'expression de E_m obtenue à la question 1 pour en déduire la variation Δr de r sur une orbite (ce qui est donc la perte d'altitude du satellite), en fonction de r et α seulement.
On utilisera un développement limité :

$$\frac{1}{r - \Delta r} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{1 - \Delta r/r} \underbrace{\simeq}_{\Delta r/r \ll 1} \frac{1}{r}(1 + \Delta r/r).$$

Faire l'A.N. pour une altitude de 200 km.
c - Combien de jours faut-il pour perdre une altitude de 10 km ?

Rép : $\boxed{1}$ $E_B = \frac{1}{2}m(\Omega R_T \cos\lambda)^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$; $E_m = -\frac{GM_T m}{2R_T}$

$\boxed{2}$ $v_0 = \sqrt{g_0 R_T} = 7,9$ km/s ; $r_1 = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_T^2 T_1^2}{4\pi^2}} = 4,2.10^4$ km ; $v_1 = 3,0$ km/s ; $v_0' = \sqrt{2g_0 R_T^2\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a}\right)}$; $v_1' = \sqrt{2g_0 R_T^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)}$; $\Delta t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{g_0 R_T^2}} = 5$h14mn

$\boxed{3}$ $a = 17,9$ u.a ; $e = 0,96; p = 1,15$ u.a

$\boxed{4}$ $E_p^{\star}(r) = \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}$

$\boxed{5}$ $E_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$; $L_P(n) = \sqrt{\frac{m r_n e^2}{4\pi\varepsilon_0}}$; $r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$; $E_0 = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = 2,18 \times 10^{-18}$ J $= 13,6$eV

$\boxed{6}$ $\Delta E_m = -2\pi\alpha m G M_T$; $\Delta r = 4\pi\alpha r^2 = 82$ cm ; 751 jours.