

Impact mécanique de la pluie (difficile, sujet de l'X)

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Intégrale généralisée : $J_n \triangleq \int_0^{+\infty} x^n \exp(-x) dx = n!$, ($n \in \mathbb{N}$)

Notation et données :

Position du problème

Nous nous proposons d'étudier l'effet mécanique de la pluie sur un pare-brise. Une goutte est assimilée à une sphère de rayon r . Sa vitesse, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_0(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ considéré comme galiléen, est notée $\vec{v} = v\vec{u}_x$ où $\vec{u}_x = \vec{g}/g$. La force de frottement fluide d'un objet sphérique est donnée par

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}C_x\rho_a\pi r^2v\vec{v},$$

où $C_x = 0,4$ est le coefficient de traînée supposé constant.

1.1 Chute d'une goutte d'eau

1.1.1 Sur la base de sa propre expérience, proposer un ordre de grandeur du rayon d'une goutte d'eau de pluie et celui de sa vitesse de chute.

1.1.2 Établir le bilan des forces qui s'exercent sur une goutte, lors de sa chute. Préciser leur expression.

1.1.3 Établir que la vitesse de chute de la goutte est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = 1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2.$$

où u est une constante que l'on exprimera en fonction de $\rho_e/\rho_a, g, r$ et C_x , et dont on donnera une interprétation physique.

1.1.4 Déterminer la solution de l'équation différentielle en considérant que la goutte quitte le nuage avec une vitesse nulle.

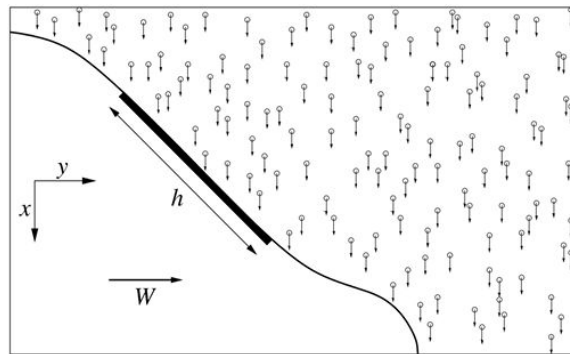
1.1.5 Esquisser l'allure de l'évolution $v/u = f(t/t^*)$ où t^* représente un temps caractéristique que l'on précisera. Commenter brièvement cette évolution.

1.1.6 À partir du tracé précédent, définir une distance caractéristique H^* au delà de laquelle on peut considérer que la goutte a atteint une vitesse limite.

1.1.7 Calculer les valeurs numériques de u et H^* . Commenter brièvement ce dernier résultat.

1.2 Effort mécanique

Nous souhaitons estimer la force qu'exerce la pluie sur le pare-brise d'un avion. Le pare-brise est modélisé par une surface S rectangulaire de hauteur $h = 0,5 \text{ m}$ et de largeur $l = 1 \text{ m}$, inclinée d'un angle $\alpha = 45^\circ$ sur la direction horizontale (figure (1)). Nous considérerons que, lorsque qu'une goutte heurte le pare-brise, sa quantité de mouvement, relativement à un repère lié à l'avion, s'annule.



L'intensité I caractérisant une précipitation est mesurée par la hauteur d'eau recueillie au sol, par unité de temps. Pour les applications numériques, nous adopterons $I = 300 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ (pluie extrême, sur une courte durée).

Dans un premier temps, nous supposons que les gouttes de pluie ont le même rayon $r_0 = 0,5 \text{ mm}$ et tombe à la même vitesse $\vec{u} = u\vec{u}_x$, $u = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Nous notons N_0 leur nombre par unité de volume (d'atmosphère).

1.2.1.1 Exprimer N_0 en fonction de u, r_0 et de l'intensité I .

1.2.1.2 Calculer la valeur numérique de N_0 .

1.2.1.3 En déduire la distance moyenne d_0 entre les gouttes de pluie.

1.2.2 Nous considérons d'abord le cas d'un avion immobile sur l'aérodrome.

1.2.2.1 Représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise entre les instants t et $t + dt$.

1.2.2.2 Exprimer la force $\vec{F}_0$ exercée par la pluie sur le pare-brise. Vérifier que son module s'écrit sous la forme :

$$F_0 = (k \cos \alpha) S \rho_e u^2.$$

Expliciter la dépendance du facteur k avec N_0 et r_0 . Préciser sa dimension.

1.2.2.3 Calculer l'intensité de cette force.

1.2.3 Nous considérons maintenant un avion volant à la vitesse $\vec{W} = W\vec{u}_y$.

1.2.3.1 Donner un ordre de grandeur de W pour un avion de ligne.

1.2.3.2 En se plaçant dans un repère lié à l'avion, représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise, entre les instants t et $t + dt$. On considérera les ordres de grandeur en jeu.

1.2.3.3 En déduire l'expression de la force $\hat{F}$ exercée par la pluie sur le pare-brise.

1.2.3.4 Donner l'ordre de grandeur de la force correspondante.

1.3 Distribution du rayon des gouttes

En réalité, les gouttes de pluie n'ont pas toutes la même taille. Le nombre dN de gouttes, par unité de volume (atmosphérique), dont le rayon est compris entre r et $r + dr$ suit sensiblement la loi de MarshallPalmer :

$$dN = n(r)dr = n_0 \exp(-r/\lambda)dr,$$

où n_0 et λ sont les paramètres (constants) de la distribution.

La différentielle $dP(r) \triangleq dN/N_0$, où N_0 représente le nombre total de gouttes par unité de volume, s'interprète comme la probabilité élémentaire que le rayon d'une goutte appartienne à l'intervalle $[r, r + dr]$.

1.3.1 Quelques propriétés de la distribution de rayon.

1.3.1.1 Exprimer N_0 en fonction de n_0 et λ .

1.3.1.2 Comparer les probabilités $\mathcal{P}(r \leq \lambda)$ et $\mathcal{P}(r > \lambda)$ que le rayon d'une goutte choisie aléatoirement soit, respectivement, inférieur ou supérieur à λ . Interpréter ce résultat.

1.3.1.3 Exprimer le rayon moyen $\langle r \rangle$ des gouttes. Mettre ce résultat en perspective du précédent.

1.3.2 Nous définissons la grandeur différentielle suivante :

$$dM(r) = \rho_e \frac{4\pi}{3} r^3 n(r) dr.$$

1.3.2.1 Donner sa signification physique.

1.3.2.2 Esquisser l'allure graphique de la grandeur $\mu(r) \triangleq dM/dr$.

1.3.2.3 Préciser le rayon des gouttes dont la contribution à la masse totale (par unité de volume) est la plus importante.

1.3.2.4 Exprimer la masse moyenne $\langle m \rangle$ des gouttes.

1.3.2.5 Commenter la comparaison de $\langle m \rangle$ à la masse d'une goutte de rayon $\langle r \rangle$.

1.3.3 L'expression de la force obtenue à la question (2.2.3.3) s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = -QN_0 r_0^3 \vec{u}_y$$

où le facteur Q est indépendant de N_0 et r_0 .

1.3.3.1 Exprimer la force $\vec{F}_D$ exercée par la pluie sur le pare-brise, pour la distribution (1).

1.3.3.2 Exprimer le rapport $\phi \triangleq |\vec{F}_D|/|\vec{F}|$ pour un nombre total N_0 de gouttes par unité de volume fixé et pour $\langle r \rangle = r_0$.

1.3.3.3 Conclure sur l'effet mécanique de la pluie. Le comparer à celui correspondant au maintien en pression de l'habitacle de l'avion.