DM - Pompe à vide à piston ; Effusion gazeuse

1. Étude d'une pompe à vide à piston

On envisage le dispositif dont le schéma est donnée dans la figure ci-dessous. Une enceinte de volume V (à gauche de KK') est reliée par un raccord (entre KK' et LL') de volume v_{m} à une pompe à piston (à droite de LL'). Le volume total maximum du corps de la pompe avec son raccord est V_M (entre KK' et NN'). Le piston de la pompe et le raccord sont munis de clapets anti-retour (CR en KK' et CP en MM') qui ne laissent passer le gaz que de la gauche vers la droite. Ces clapets, parfaitement étanches lorsqu'ils sont fermés, s'ouvrent dès que la pression à leur gauche est plus élevée qu'à leur droite. Ils se referment dès que la pression à leur gauche est plus faible qu'à leur droite.

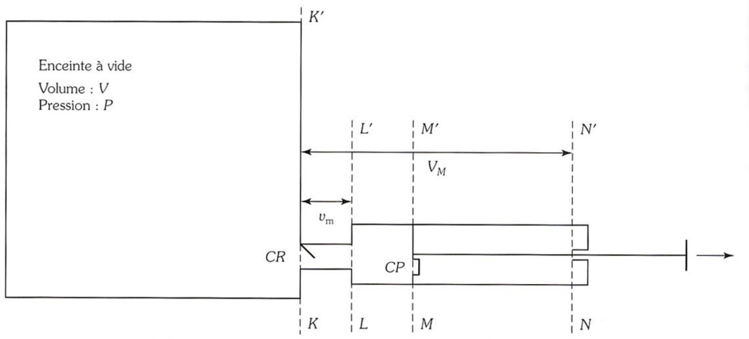

Schéma de principe de la pompe à piston raccordée à l'enceinte (attention, sur ce schéma, les proportions ne sont pas respectées).

Au niveau de la partie droite de la pompe (en NN'), le passage de la tige du piston n'est pas étanche. De ce fait, la pression à droite du piston est toujours égale à la pression atmosphérique P_0.
Avec cette disposition des clapets, cette pompe permet d'abaisser la pression dans l'enceinte. On suppose enfin que le contact entre le piston et corps de la pompe est parfaitement étanche.
On admettra que l'air de l'atmosphère peut-être considéré comme un gaz parfait, et que toutes les transformations sont isothermes, même si les pressions changent dans l'enceinte et dans la pompe. La pression atmosphérique sera prise égale $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa.
Données numériques : cylindrées $\dfrac{V}{V_M} = \dfrac{V_M}{v_m} = 20$.
Vous préciserez, à chaque question, le système étudié.
1.1 CR est fermé. CP est ouvert alors qu'il est en LL'. Soit P_L la pression la plus faible que l'on peut théoriquement obtenir dans la pompe seule munie de son raccort en tirant le piston jusqu'à NN'. Donner l'expression de P_L en fonction de P_0 et des caractéristiques géométriques de cette pompe v_m et V_M. Peut-on préciser la valeur de la pression limite la plus basse que l'on peut atteindre dans l'enceinte avec cette pompe ?
1.2 AU départ, l'enceinte est à la pression atmosphérique P_0 et on donne un premier coup de pompe : un aller et retour avec le piston $LL' \to NN'$ puis $NN' \to LL'$. Au début, lorsque le piston est en LL', les deux clapets sont ouverts et la pression dans le raccord est aussi P_0 ; le clapet CP se ferme dès que la piston se déplace vers NN', tandis que le clapet CR reste ouvert puisque la pression diminue dans le compartiment de droite. Expliquer pourquoi la pression dans la pompe finit toujours par atteindre P_0 avant que le piston ne revienne en LL' et donner la valeur P_1 de la nouvelle pression dans l'enceinte après ce premier coup de pompe.
1.3 On introduit des rapport volumétrique $a = \dfrac{V_M}{V+V_M}$ et $b = 1 - a = \dfrac{V}{V+V_M}$. Exprimer alors P_1 en fonction de P_0, P_L, a et b.
1.4 On donne un deuxième coup de pompe. La nouvelle pression dans l'enceinte est P_2 ; préciser quand le clapet CR s'ouvre et exprimer P_2 en fonction de P_1, P_L, a et b. En déduire l'expression de P_2 en fonction de P_0, P_L, a et b.
1.5 Donner en définitive la pression P_q dans l'enceinte après q coup de pompe en fonction de q, P_0, P_L, a et b.
1.6 On rappelle que le terme général d'une suite arithmético-géométrique définie par récurrence de la manière suivante $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta$ et de premier terme u_0 est $u_n = \alpha^n (u_0 - r) + r$, avec $r = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Déduire de ce résultat l'expression de P_q en fonction de q, P_0, P_L et b.
1.7 Quel est le nombre de coups de pompe nécessaire pour atteindre, dans l'enceinte, P_L à 1% près ?

2. Effusion gazeuse

Soit un récipient constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T. À l'instant $t = 0$, une mole d'un gaz parfait remplit le compartiment (1), le compartiment (2) est vide et on perce un petit trou de section s entre les deux compartiments.
On note N_1 et N_2 les nombres de molécules dans les compartiments (1) et (2).
On adopte pour le gaz parfait le modèle simplifié suivant : les vecteurs vitesse sont parallèles à l'une des six directions de vecteurs directeurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, -\vec{u}_x, -\vec{u}_y, -\vec{u}_z$ avec un sixième des molécules dans chacune de ces six directions. La norme de la vitesse de toutes les molécules est identique égale à la vitesse quadratique moyenne v^*.
2.1 Établir l'expression du nombre $\mathrm{d}N_{1\to 2}$ de molécules contenues dans le compartiment (1) et traversant la surface s entre les instant t et $t + \mathrm{d}t$. Même question pour $\mathrm{d}N_{2\to 1}$.
2.2 En déduire les expressions de $\dfrac{dN_1}{dt}$ et $\dfrac{dN_2}{dt}$ en fonction de N_1, N_2, s, v^* et V.
2.3 Établir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$. On fera apparaître une constante de temps τ caractéristique du phénomène observé. Indication : on pourra effectuer le changement de variables $u = N_1 + N_2$ et $w = N_1 - N_2$.
2.4 Comment varie τ avec la masse des molécules ?