DM type CCP : NASA's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'Homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant les aspects techniques que les aspects humains.
Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.
Seule la partie I est proposée. La partie II étudie le système de propulsion, mais sort du cadre du programme de première année.

1. Le voyage entre la Terre et Mars

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

I.A - Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique.

Q 1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.
Q 2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_o}$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.
Q 3. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'origine 0 et de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ avec l'unitaire $\overrightarrow{e_z}$ tel que $\overrightarrow{L_o} = L_o\overrightarrow{e_z}$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ en fonction de L_0 et m. Quel est le nom de cette grandeur ?
Q 4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et de la masse de l'objet m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.B - Aspect énergétique et troisième loi de Kepler.

Q 5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m.
Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G, M_S et R (troisième loi de Kepler).

I.C - Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert.

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.
Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann). La position de la Terre au temps $t = 0$du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).
Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T, a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T. En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.
Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.
Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta(t = 0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.
Q 11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

I.D - Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.
Q 12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars
Q 13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.
NB : Les questions suivantes (Q14 à Q 21) sont indépendantes de la question Q 13.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\overrightarrow{V_T}$ colinéaire à $\overrightarrow{V_T}$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.
Dans la suite, on cherche une réduction de 25% de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$) et l'on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$.
On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = p/(1 + e\cos\theta)$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.
Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.
Q 15. Justifier que r_P, le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie : $r_P = a_T$.
Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit :

$$e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$$

et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e.
Q 18. En déduire la vitesse V''_T que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.
Q 19. Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V'_T = V''_T - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert.
Calculer la valeur numérique de $\Delta V' T$.
Q 20. Exprimer $C = r^2 \mathrm{~d}\theta / \mathrm{d}t$ en fonction de a_T et $V'' T$.
Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.
On donne :

$$\int_0^{\theta_M\left(\Delta t'\right)} \frac{1}{(1+e \cos \theta)^2} d\theta = 2,15$$

avec l'excentricité calculée en question 16.
Indication : la relation $C = r^2 \cdot d\theta / dt$ peut s' écrire sous la forme $dt = \left(r^2 / C\right) . d\theta$.
Données :
- Masse du Soleil : $\mathrm{M_S} = 2,00 \cdot 10^{30}$ kg
- Demi-grand axe de l'orbite de la Terre : $\mathrm{a_T} = 150.10^6$ km
- Demi-grand axe de l'orbite de Mars : $\mathrm{a_M} = 228.10^6$ km
- Constante gravitationnelle : $\mathrm{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \mathrm{SI}$
- Champ de pesanteur terrestre : $\mathrm{g} = 9,81 \mathrm{~m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
- Période de révolution de la Terre : $\mathrm{T_T} = 365$ jours terrestres
- Période de révolution de Mars : $\mathrm{T_M} = 687$ jours terrestres

Questions 7 et 10

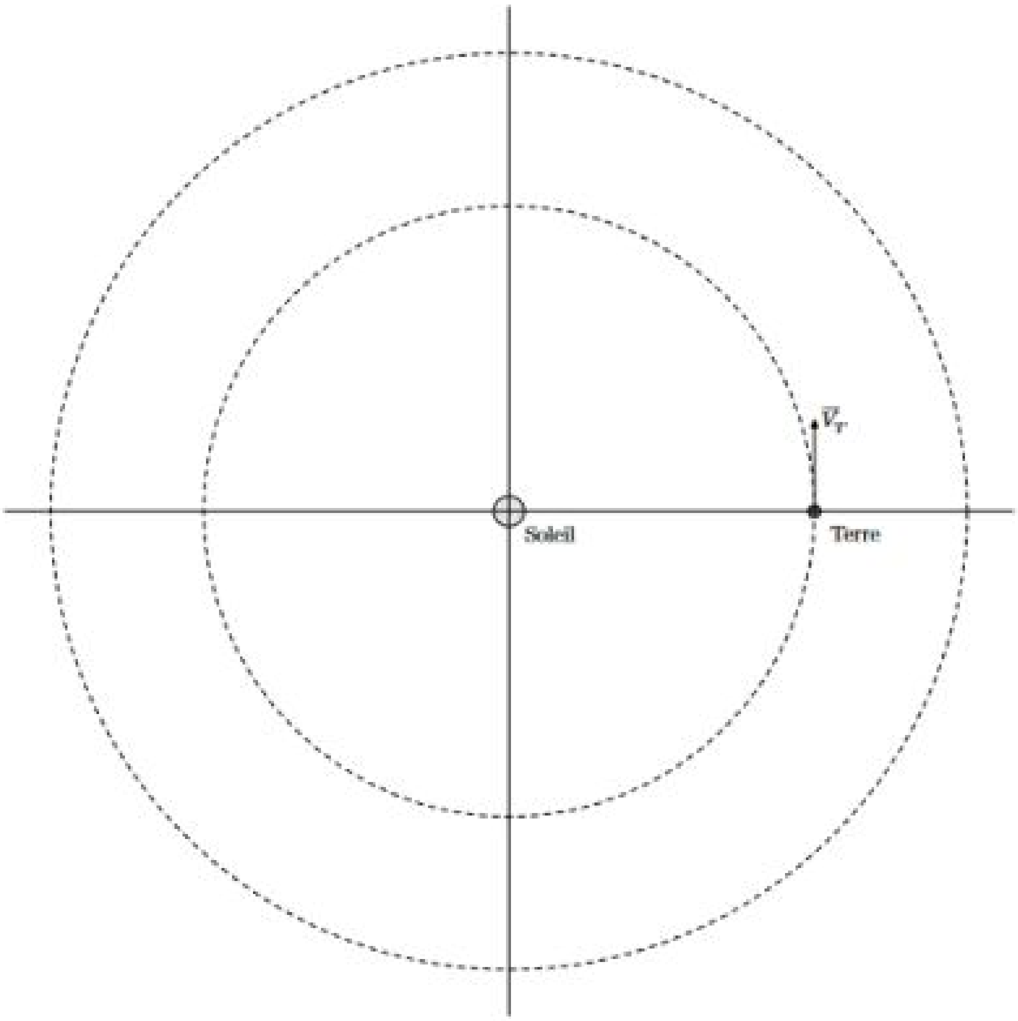

Figure A

Questions 14 et 16

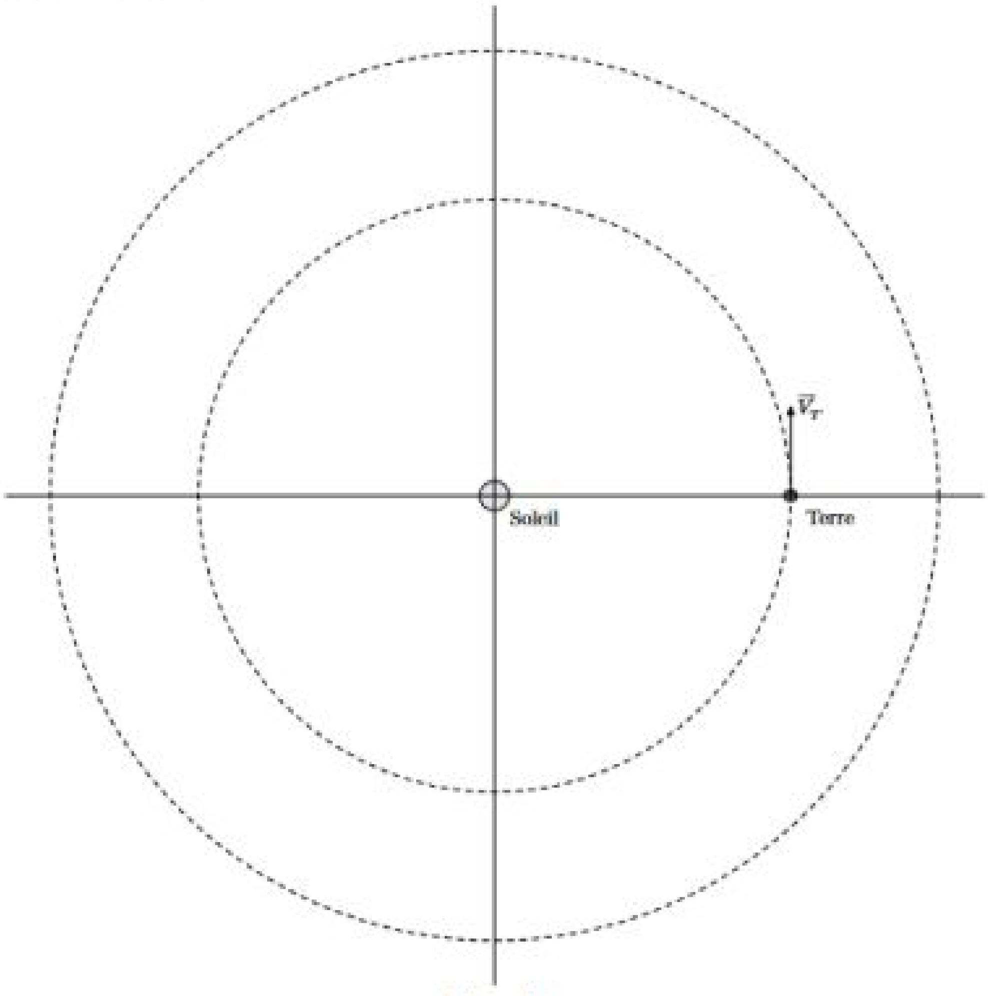

Figure B