Mouvement dans un champ de force centrale

Ce qu'il faut connaître

- Quelles sont les définitions des référentiels terrestre, géocentrique et héliocentrique ?
- Décrire le mouvement de la Terre dans chacun.
- Donner l'expression de la force gravitationnelle et de son énergie potentielle.
- Énoncer les trois lois de Kepler.
- Donner le lien entre énergie et demi-grand axe, donner la nature de la trajectoire selon son énergie

Ce qu'il faut savoir faire

- Démontrer la conservation du moment cinétique, en déduire mouvement plan et loi des aires.
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique, construire une énergie potentielle effective. L'utiliser pour décrire qualitativement le mouvement radial (état lié ou état de diffusion).
- Cas particulier d'un mouvement circulaire : montrer que le mouvement est uniforme, exprimer sa période et retrouver la 3^{e} loi de Kepler, l'énergie en fonction du demi-grand axe.
- Satellite géostationnaire : justifier le type d'orbite, calculer l'altitude du satellite.

Exercices de cours

C1 - Particularités de l'orbite circulaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est circulaire (rayon R).
On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.
On note $R_T = 6400$ km le rayon de la Terre et $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg sa masse. On donne $G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.
1 - Montrer que le mouvement est circulaire uniforme. On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite.
2 - Donner l'expression de la norme v de la vitesse sur l'orbite, puis de la période du mouvement, en fonction du rayon R, de la masse de la Terre M_T et de la constante G.
3 - Retrouver la troisième loi de Kepler
4 - Énergie mécanique : donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse m en fonction de G, M_T, m et R, et montrer qu'elle est bien négative.
5 - Orbite basse : dans cette question, le satellite est en orbite basse, donc à une altitude (mesurée par rapport à la surface de la Terre) $h \ll R_T$. Sa distance au centre de la Terre O est donc $R = R_T + h \simeq R_T$.
a - Calculer sa période de révolution autour de la Terre.
b - Calculer également sa vitesse. Cette vitesse, qui est celle nécessaire à la mise en orbite d'un objet à altitude nulle, est appelée **première vitesse cosmique**.

C2 - Satellite géostationnaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est circulaire, dont on note R le rayon.
On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note $R_T = 6400$ km le rayon de la Terre et $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg sa masse. On donne $G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.
On considère un satellite géostationnaire.
1 - Expliquer en quoi "géostationnaire" consiste, et quel type d'orbite cela implique (en terme de forme, de localisation et de période).
2 - Donner l'expression de la période du mouvement en fonction du rayon R, de la masse de la Terre M_T et de la constante G. On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite (identique questions 1 et 2 de l'EC précédent).
3 - En déduire la distance R, puis l'altitude h par rapport au sol.

Définition : champ de force centrale

M évolue dans un champ de force centrale, de centre O, si cette force s'exprime sous la forme

$$\boxed{\vec{F} = F(r)\vec{e}_r}$$

Une force centrale est **toujours conservative** : il existe $E_p(r)$ telle que $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$.

	force	énergie potentielle
gravitation		
force électrostatique		
force élastique		

Démonstration :

I. Conséquences générales pour une force centrale

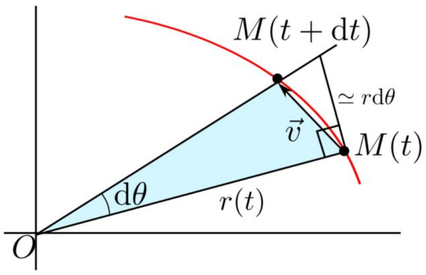
1. Étude avec le moment cinétique

a. Conservation du moment cinétique

b. Démonstration conséquence 1 : le mouvement est plan

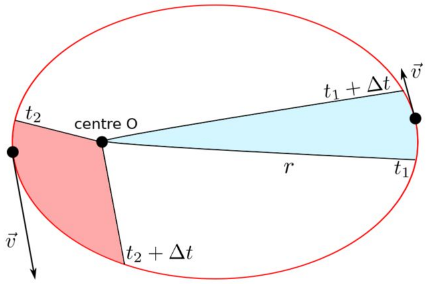
c. Démonstration conséquence 2 : la loi des aires

Le mouvement étant dans le plan Oxy, on utilisera dans toute la suite les coordonnées polaires dans ce plan (alors qu'avant on était en coordonnées sphériques).



$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{ est appelée constante des aires.}}$

Interprétation géométrique :
L'aire hachurée vaut :



Comme $C =$ cst, cette aire balayée est toujours la même pendant un temps dt constant, où que l'on soit sur la trajectoire.

Autre interprétation : $r^2\dot{\theta}$ doit rester constant au cours du mouvement, donc - si r est petit alors il faut pour compenser une vitesse angulaire plus importante ($\dot{\theta}$ augmente). - si r est grand alors la vitesse angulaire sera plus petite ($\dot{\theta}$ diminue).

2. Étude énergétique

a. Introduction de l'énergie potentielle effective

Écrivons l'énergie mécanique d'une masse m évoluant dans un champ de force centrale dérivant de $E_p(r)$.

Énergie potentielle effective

Pour un mouvement dans un champ de force centrale, on peut écrire l'énergie mécanique de sorte à ce que tout se passe comme si on étudiait un mouvement à un degré de liberté selon un axe fixe de coordonnée r, avec :

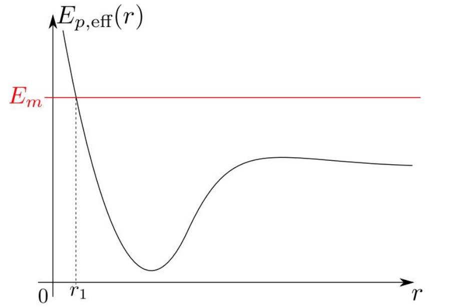
- une énergie cinétique $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$
- une énergie potentielle $\boxed{E_{p,\text{eff}}\,(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)}$.

On parle d'énergie potentielle effective, pour dire que tout ce passe comme s'il s'agissait d'une énergie potentielle. Il ne faut pas connaître les expressions par cœur, mais **être capable de refaire ces manipulations.**

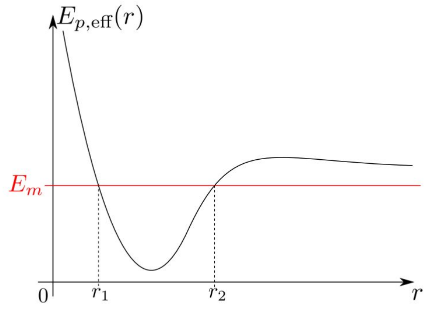
b. Utilisation pour prédire le type de mouvement

$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\geqslant 0} + E_{p,\text{eff}}(r)$, donc $E_{p,\text{eff}}(r) \leqslant E_m$.

Ceci donne le type de mouvement possible, en fonction de la valeur de E_m : cf schéma ci-contre avec une forme arbitraire pour $E_{p,\text{eff}}(r)$.
Ceci sera mobilisé dans la partie suivante.



Zone accessible : $r \geq r_1$
$\Rightarrow$ mouvement ouvert (ou de diffusion).



Zone accessible : $r_1 \leq r \leq r_2$
$\Rightarrow$ mouvement borné.

II. Application aux planètes et satellites

Une force newtonnienne (ou champ de force newtonnien) est une force en $1/r^2$. Elle peut être attractive ou répulsive. Nous nous intéressons ici uniquement au cas gravitationnel, donc attractif.

1. Rappels sur la loi de Newton

Loi de la gravitation universelle

$$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r \qquad E_p(r) = -G\frac{mm'}{r}.$$

$G = 6,674 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Cette loi est valable pour des masses m et m' ponctuelles, et aussi si les masses m et m' sont à symétrie sphérique, centrée respectivement en O et en M. Cette loi est donc valable en très bonne approximation pour des planètes et pour tout corps céleste en général, à condition que O et M soient le centre de la planète, de l'étoile, etc.

Lien avec la pesanteur à la surface d'une planète : SAVOIR REFAIRE

Soit une planète de masse M_P et rayon R_P. À sa surface, le poids d'un objet de masse m est en première approximation la force gravitationnelle exercée par la planète sur cet objet :

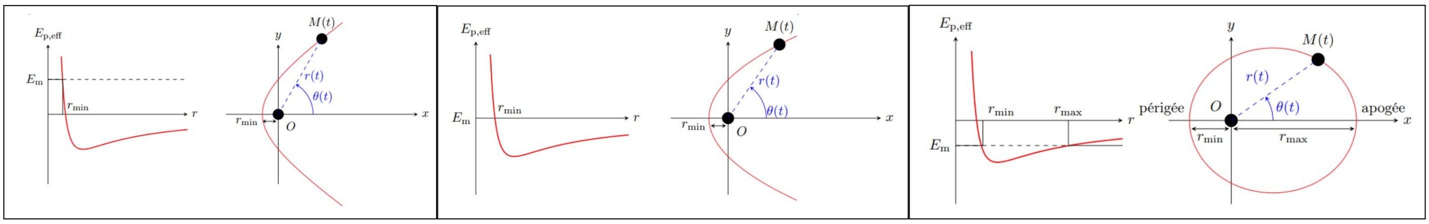
On en déduit $g = \frac{GM_P}{R_P^2}$. Sur Terre, avec $M_P = 6,0 \times 10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km, on trouve bien $g = 9,8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. Nature des trajectoires

- L'énergie potentielle effective est :

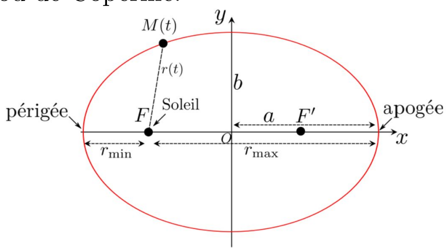
$\Rightarrow$ Le type de mouvement va donc dépendre de la valeur de l'énergie mécanique (qui se conserve) de la masse m'. Initialement $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mm'}{r_0}$, ce qui peut être positif ou négatif.

Ainsi trois cas : $\begin{cases} E_m > 0 : r \text{ peut tendre vers l'infini, état non borné, de diffusion. (Les trajectoires sont des hyperboles.)} \\ E_m = 0 : r \text{ peut tendre vers l'infini, état non borné, de diffusion. (Les trajectoires sont des paraboles.)} \\ E_m < 0 : r \text{ est borné entre deux valeurs, c'est un état lié. (Les trajectoires sont des ellipses.)} \end{cases}$

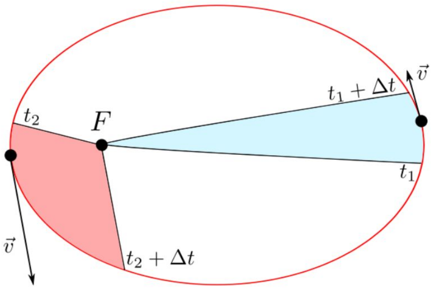


3. Lois de Kepler

Les trois lois de Kepler Ces lois sont valables dans le référentiel héliocentrique ou de Copernic.



Loi 1 (loi des orbites) : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.



Loi 2 (loi des aires) : les aires balayées par la ligne Soleil-planète pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

Loi 3 (loi des périodes) : le carré de la période de révolution autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe de son ellipse, soit :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{cst}, \forall \text{ la planète}}$$

avec M_S la masse du Soleil. Ceci est indépendant de la masse de la planète.
Ces lois se transposent au cas d'un satellite en orbite autour d'une planète : M_S devient la masse de la planète.

4. Energie de l'ellipse, lien avec le demi-grand axe

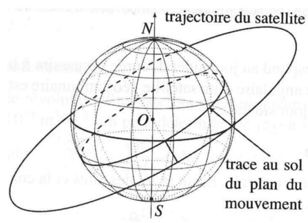
On peut démontrer la relation IMPORTANTE : $\boxed{E = -\dfrac{GMm}{2a}}$

5. Cas de l'orbite circulaire : Faire EC1, SAVOIR REFAIRE

Particularités du mouvement circulaire d'un satellite

- Une orbite circulaire est nécessairement parcourue avec une vitesse uniforme ($\|\vec{v}\| = \text{cst}$, soit aussi $\dot{\theta} = \text{cst}$).
- On peut facilement exprimer la période du mouvement et ainsi retrouver la 3$^{\text{e}}$ loi de Kepler (pour cela, appliquer un pfd pour trouver v).
- On peut en déduire la vitesse d'un satellite en orbite basse, pour laquelle $R \simeq R_T$. Elle est de l'ordre de 8 km/s. C'est la vitesse minimale à communiquer à un objet pour le satelliser.
- L'énergie mécanique se met sous une forme simple (il suffit d'utiliser l'expression de la vitesse).

Cas d'un satellite géostationnaire : Faire l' EC2, SAVOIR REFAIRE



Il faut savoir :
- Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire
- justifier sa localisation dans le plan équatorial : sinon il ne peut pas être géostationnaire !