NASA's Mars Exploration Program

Le voyage entre la Terre et Mars

Q1. $m_1 a = G m_1.m_2 / r^2$ donc les dimensions de G sont : $L^3.M^{-1}.T^{-2}$, soit en SI : $[G] = m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

Q2. Cours

Q3. Cours, $\vec{L_o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$ d'où $C = L_o /m$: constante des aires.

Q4. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'objet en orbite circulaire autour du soleil s'écrit en projection sur $\vec{e}_r$:

$$m\frac{V^2}{R} = G\frac{mM_S}{R^2} d'où\ V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

AN : $V_T = \sqrt{G\frac{M_S}{R_T}} = \sqrt{6{,}67.10^{-11}\frac{2.10^{30}}{150.10^9}} = 2{,}98.10^4$ $m.s^{-1}$ (on prend $R_T = a_T$)

$V_M = \sqrt{G\frac{M_S}{R_M}} = \sqrt{6{,}67.10^{-11}\frac{2.10^{30}}{228.10^9}} = 2{,}42.10^4$ $m.s^{-1}$ (on prend $R_M = a_M$)

Q5. $Ec = ½\ mV^2 = ½\ G\frac{mM_S}{R}$; $Ep = -\ G\frac{mM_S}{R}$; $Em = -\ G\frac{mM_S}{2R}$

Q6. $V = \frac{2\pi R}{T}$ d'où $T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$, 3è loi de Képler $T^2/R^3 = 4\pi^2/GM_S$

Q7.

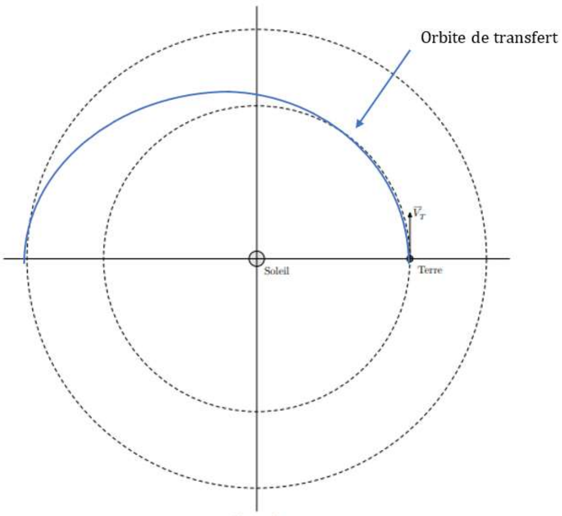


Figure A

Q8. Le vaisseau est sur une orbite elliptique telle que :

$$2a = a_T + a_M.$$

L'énergie mécanique du vaisseau sur cette orbite est :

$$Em = -\ G\frac{mM_S}{a_T+a_M}$$

En $r = R_T = a_T$:

$$Em = Ec(R_T) + Ep(R_T) = ½\ mV_T'^2 - G\frac{mM_S}{a_T}$$

avec $GM_S = a_T V_T^{\ 2}$, d'où :

$$½\ mV_T'^2 - mV_T^2 = -\ G\frac{mM_S}{a_T+a_M}$$

D'où $V_T'^2 = 2V_T^2 - 2\ G\frac{M_S}{a_T+a_M}$

$V_T'^2 = 2V_T^2 - 2\frac{a_T}{a_T+a_M}V_T^2$

Soit $V'_T = V_T\sqrt{2\left(1-\frac{a_T}{a_T+a_M}\right)} = V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_T+a_M}}$

Et $\Delta V_T = V_T\left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T+a_M}}-1\right) = 2{,}98.10^4\left(\sqrt{2\left(\frac{228}{150+228}\right)}-1\right) = 2{,}93.10^3\ m.s^{-1}$

Q9. Pour aller de la terre à Mars, le vaisseau parcourt une demi-ellipse, il mettra donc une demi-période : $\Delta t = T/2 = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}} = \pi\sqrt{\frac{((150+228)/2)^3.10^{27}}{6{,}67.10^{-11}.2.10^{30}}} = 2{,}23.10^7$ s = 259 jours (inférieur à T_M = 687 jours)

Q10. Au moment de l'arrivée du vaisseau $\theta_V(\Delta t) = \theta_M(\Delta t) = \pi$ et à l'instant initial θ_{Mo}, tel que
$\theta_M(\Delta t) - \theta_{Mo} = \Omega_M . \Delta t$ où $\Omega_M = V_M / a_M$ la vitesse de rotation de Mars sur son orbite, supposée circulaire.
$\theta_M(\Delta t) - \theta_{Mo} = V_M . \Delta t / a_M = 2{,}42.10^4 . 2{,}23.10^7 / 228.10^9 = 2{,}37$ rad
D'où $\theta_{Mo} = \pi - 2{,}37 = 0{,}775$ rad $= 0{,}775 * 180 / \pi = 44{,}4° = \alpha_o$

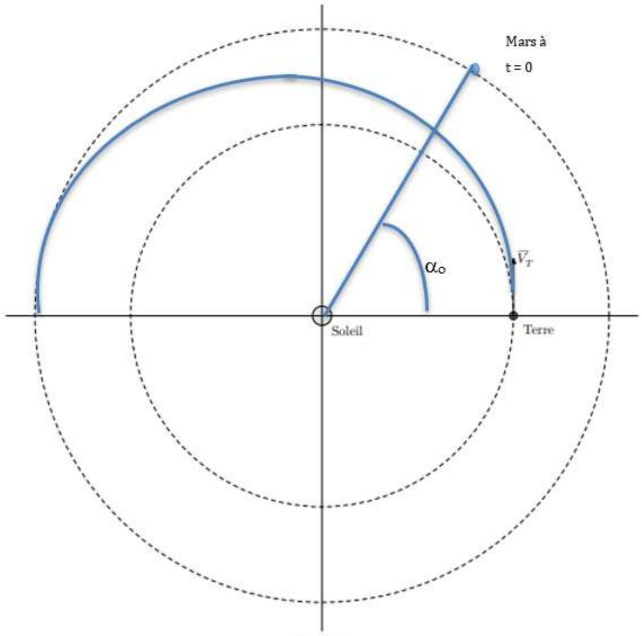


Figure A

Q11. Lorsque le vaisseau parcourt toute l'ellipse de transfert, il s'est écoulé une période :
$T = 4{,}46.10^7$ s = 518 j = 1 an + 153 j
La Terre a donc fait une révolution complète sur son orbite
D'où $\theta_T(T) = 360.153/365 = 151°$

Le vaisseau ne sera pas en phase avec la terre lorsqu'il atteint l'orbite terrestre…

Q12.
Après son départ de Mars, le vaisseau rejoint toujours l'orbite terrestre en Δt, pendant que la Terre doit parcourir un angle $\pi + \alpha_1$ à vitesse angulaire $2\pi/T_T$, soit :

$$\Delta t = T_T \frac{\pi + \alpha_1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{2\pi \Delta t}{T_T} - \pi = 1{,}32\, rad = 75°$$

Q13. Soit t = 0 l'instant du lancement depuis l'orbite terrestre.
L'angle entre Mars et la terre est :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{2\pi}{T_M} t - \frac{2\pi}{T_T} t$$

La mission sur Mars se termine à l'instant t_1 tel que : $\alpha(t_1) = \alpha_1$, modulo 2π

$$\alpha(t_1) = \alpha_1 + 2n\pi \;\; avec\; n\; entier\; relatif$$

Remarque : la terre tournant plus vite que Mars, l'angle $\alpha(t)$ va rapidement devenir négatif, donc n sera négatif.

On en déduit :

$$t_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 + 2n\pi}{2\pi} \frac{T_T T_M}{T_T - T_M}$$

La première valeur positive de t_1 est obtenue pour n = -1 :

$$t_1 = 712\, jours$$

On doit soustraire la durée du voyage aller, donc la durée de la mission sur Mars est :

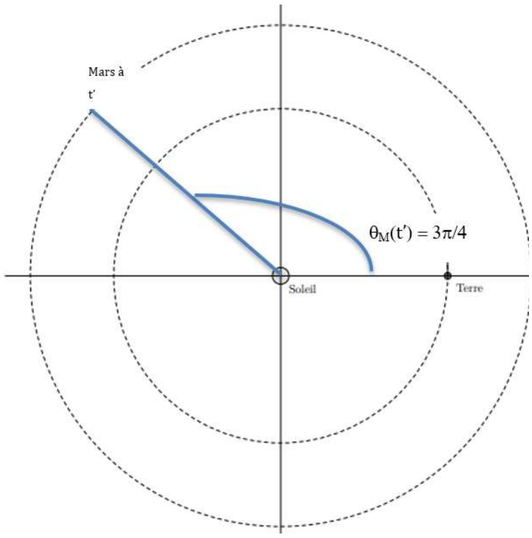
$$\Delta t_{Mars} = 712 - 259 = 453\, jours$$

La durée totale de la mission est :

$$\Delta t_{totale} = 712 + 259 = 970\, jours$$

La possibilité de retour se présente à chaque variation d'une unité de n.
La période $\Delta t_{attente}$ entre deux fenêtres de lancement est donc :
$\Delta t_{attente} = \frac{T_T T_M}{T_M - T_T} = 779\, jours$ (période relative entre la Terre et Mars)

Q14.

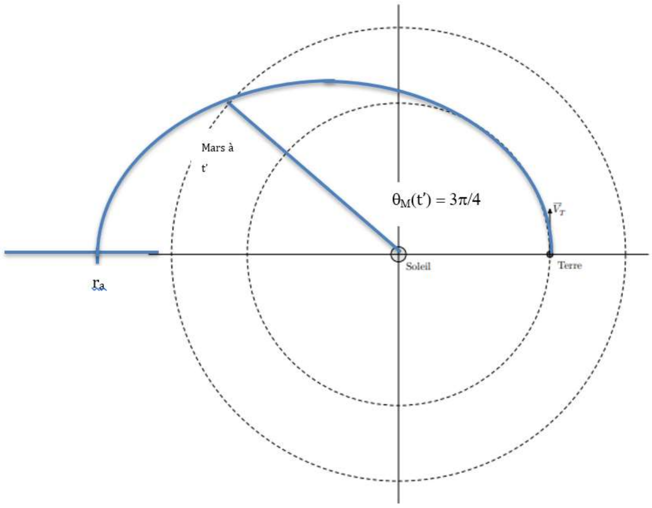


Q15. L'orbite proposée est une ellipse, et la vitesse initiale est perpendiculaire à l'axe soleil-terre, or en polaire $\vec{v}$ (M) = $\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et si $\vec{v}$ est perpendiculaire à l'axe terre-soleil $\dot{r} = 0$, donc r est un extremum, en l'occurrence un minimum, donc $r_P = a_T$.

Q16. En $\theta = 0$ $\quad r_p = p / (1+e) = a_T$

En $\theta = 3\pi/4$ $\quad r = p / (1- e/\sqrt{2}) = a_M$

d'où $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{a_M}{\sqrt{2}} + a_T} = \frac{228-150}{\frac{228}{\sqrt{2}}+150} = 0{,}251$.



L'aphélie se trouve en $\theta = \pi$

$r_a = p/(1 - e) = a_T (1+e)/ (1 - e)$ avec $p = a_T(1+e)$

$= a_T*1{,}251/0{,}749 = 1{,}67\ a_T$

Q17. Pour cette ellipse

$2a = r_P + r_a = a_T\left(1 + \frac{1+e}{1-e}\right) = a_T\left(\frac{2}{1-e}\right)$

Et d'après Q8

$Em = - G\frac{mM_S}{2a} = -ma_T.V_T^2(1-e) / 2a_T = -m.V_T^2(1-e)/ 2$

Avec $GM_S = a_TV_T^{\ 2}$

Q18 Toujours d'après Q8 en $r = r_p = a_T$ $\quad Em = Ec(a_T) + Ep(a_T) = ½\ mV_T''^2 - G\frac{mM_S}{a_T}$

$$- ½.m.V_T^2(1-e) = ½\ mV_T''^2 - mV_T^2$$

$$V_T'' = V_T\sqrt{1+e} = 3{,}34.10^4\ m.s^{-1}$$

Q19. $\quad \Delta V_T' = V_T'' - V_T = V_T(\sqrt{1+e} - 1) = 2{,}98.10^4.(\sqrt{1+0{,}251} - 1) = 3{,}53.10^3\ m.s^{-1}$

Q20. $C = L_o/m = a_T.V_T''$

Q21. $dt = r^2 d\theta / C$ d'où

$\Delta t' = \frac{1}{C}\int_0^{3\pi/4} \frac{a_T^{\ 2}(1+e)^2}{(1+e.cos\theta)^2}\, d\theta = \frac{a_T(1+e)^2}{V''_T}*2{,}15 = 150.10^9\,\frac{(1+0{,}251)^2}{3{,}34.10^4}*2{,}15 = 1{,}51.10^7 s = 175$ jours

La durée du transfert a été raccourcie de 259 – 175 = 84 jours.