

Problème 1 : Moteur de Stirling.

Rendement du moteur de Stirling :

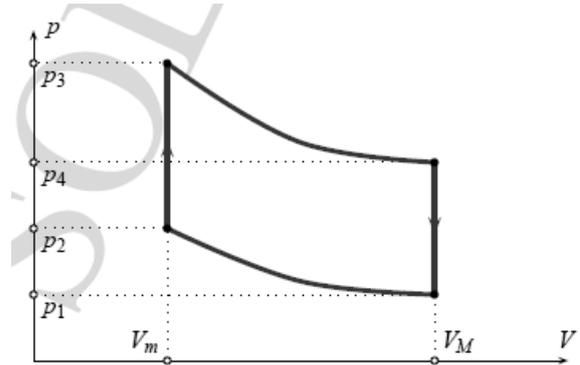
1. On nous donne la masse de gaz et la masse molaire, on obtient directement : $n = \frac{m}{M} = 5,00 \text{ mol}$

Pour chaque état, on connaît la température et le volume du gaz, on obtient donc par application de la loi des gaz

parfaits : $P_1 = \frac{nRT_F}{V_M} = 65,1 \text{ bar}$; $P_2 = \frac{nRT_F}{V_m} = 130 \text{ bar}$; $P_3 = \frac{nRT_C}{V_m} = 488 \text{ bar}$; $P_4 = \frac{nRT_C}{V_M} = 244 \text{ bar}$

2. Pour une transformation isochore, le volume est constant, la représentation graphique correspondante sera donc un segment vertical.

Pour une transformation isotherme du gaz parfait, d'après la LGP, la représentation graphique correspondante sera une portion d'hyperbole pour P est proportionnelle à l'inverse du volume. La représentation graphique du cycle est donnée ci contre.



Ce cycle est parcouru dans le sens horaire, le travail total reçu au cours d'un cycle est donc négatif ce qui est cohérent avec le caractère moteur de la machine réalisée à partir de ce principe de fonctionnement.

3. Pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température, on en déduit que cette dernière est invariante lors de la transformation isotherme : $(U_2 - U_1) = 0$

Le travail des forces de pression pour cette transformation quasi-statique s'exprime : $W_{12} = - \int_{V_M}^{V_m} P dV$

En exploitant à nouveau la LGP on obtient : $W_{12} = - \int_{V_M}^{V_m} \frac{nRT_F}{V} dV$ d'où $W_{12} = nRT_F \ln \left(\frac{V_M}{V_m} \right)$

Pour déterminer la chaleur reçue, on applique alors le premier principe de la thermodynamique :

$(U_2 - U_1) = W_{12} + Q_{12}$ on obtient alors : $Q_{12} = nRT_F \ln \left(\frac{V_m}{V_M} \right)$

De même on obtient : $(U_4 - U_3) = 0$ $W_{34} = nRT_C \ln \left(\frac{V_m}{V_M} \right)$ et $Q_{34} = nRT_C \ln \left(\frac{V_M}{V_m} \right)$

4. Pour le gaz parfait passant de la température T_F à la température T_C , la variation de l'énergie interne

s'exprime : $(U_3 - U_2) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_F)$

Le travail des forces de pression est nul puisque le volume du système est constant : $W_{23} = 0$

Par application du premier principe, on obtient alors : $Q_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_F)$

De même on obtient : $U_1 - U_4 = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_F - T_C)$ $W_{41} = 0$ et $Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_F - T_C)$

5. A.N : $W_{12} = -Q_{12} = 9,02 \text{ kJ}$; $Q_{23} = 89,4 \text{ kJ}$; $W_{34} = -Q_{34} = -33,8 \text{ kJ}$; $Q_{41} = -89,4 \text{ kJ}$

6. Sans régénérateur, la chaleur reçue de la source chaude est exprimée par la somme des chaleurs effectivement reçues par le système et donc positives : $Q_C = Q_{23} + Q_{34}$

Le rendement du moteur est défini par le rapport du travail fourni par le moteur et de la chaleur reçue par le système ce qui donne pour expression : $r_{sr} = -\frac{W}{Q_C}$. On obtient ici : $r_{sr} = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{23} + Q_{34}} = 0,201$

7. On constate bien que les transferts thermiques se compensent $Q_{23} + Q_{41} = 0$.

Le rendement s'exprime toujours $r_{ar} = -\frac{W}{Q_C}$ mais avec $Q_C = Q_{34}$ uniquement. Le rendement s'exprime alors

$$r_{ar} = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{34}} \text{ et en reprenant les expressions de ces termes, on obtient : } r_{ar} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,733$$

8. Le cycle du moteur réversible de Carnot est composé :

- D'une compression isotherme à la température froide T_F ,
- D'une compression adiabatique réversible jusqu'à atteindre la température chaude.
- D'une détente isotherme à la température chaude T_C ,
- D'une détente adiabatique réversible pour revenir à la température froide.

Cette machine fonctionne de manière réversible, il n'y a donc pas d'entropie créée sur un cycle, le premier et le second principe appliqué sur un cycle donne alors : $\Delta_{cycle} U = 0 = Q_C + Q_F + W$ $\Delta_{cycle} S = 0 = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$

Le rendement de la machine de Carnot s'exprime alors : $r_C = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$

On observe donc que le rendement de la machine de Stirling avec un régénérateur parfait présente la même expression que le rendement de la machine de Carnot dont on sait en théorie qu'il est le rendement maximum. La machine de Stirling présente donc l'avantage d'atteindre en théorie le rendement maximum ce qui est impossible avec les autres cycles (Otto et Diesel).

9. Le rendement s'exprime toujours : $r' = -\frac{W}{Q_C}$

Les travaux sont inchangés. Une fraction x de Q_{23} est perdue dans le régénérateur, on en conclut qu'à chaque cycle, la source chaude doit compenser cette perte dans le régénérateur et fournit au total : $Q_C = xQ_{23} + Q_{34}$

On obtient finalement : $r' = -\frac{W_{12} + W_{34}}{xQ_{23} + Q_{34}} = 0,580$

10. Lors de la transformation 2→3, le cuivre reçoit le transfert thermique $(1-x)Q_{23}$.

La capacité thermique du régénérateur s'exprime : $C_R = \rho c V$

On applique le premier principe au régénérateur : $\Delta U = C\Delta T = (1-x)Q_{23} + W$

Le cuivre est solide, en lui appliquant le modèle de la phase indilatable incompressible, on en déduit que $W = 0$.

Finalement : $\Delta T = \frac{(1-x)Q_{23}}{\rho c V} = 39^\circ C$

Dans le modèle précédent, on avait supposé la température du régénérateur comme constante, on montre ici que ce n'est pas le cas dans le sens absolu du terme. Cependant, cette variation est de l'ordre de 5% de la variation de température du gaz dans le système étudié, et cette hypothèse semble tout de même raisonnable en première approximation.

Volume mort du moteur de Stirling :

11. Les mécanismes de conduction de la chaleur sont lents, ce qui explique que l'équilibre thermique est long à atteindre dans tous les systèmes où la convection est impossible à envisager. En revanche, l'équilibre mécanique s'établit rapidement. C'est cette différence de temps d'établissement de l'équilibre mécanique et de l'équilibre thermique qui explique qu'on puisse envisager une pression constante dans un système composé d'éléments de température différente.

12. La quantité de matière s'exprime comme la somme des quantités de matière dans chacun des trois éléments. On appliquant la LGP à chacun d'entre eux, on obtient bien

$$n = \frac{P}{R} \left(\frac{V_C}{T_C} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_F}{T_F} \right)$$

13. Lors de la transformation 1'→2', il n'y a pas de gaz dans le compartiment chaud, on obtient alors l'expression simplifiée :

$$P = \frac{nRT_F}{V_F + \frac{T_F}{T_R} V_R}$$

Le travail reçu au cours de cette transformation s'exprime par la même méthode qu'à la question 3 :

$$W_{1'2'} = - \int_{V_M}^{V_m} P dV_F = - \int_{V_M}^{V_m} \frac{nRT_F}{V_M V_F + \frac{T_F}{T_R} V_R} dV_F = nRT_F \ln \left(\frac{T_R V_M + T_F V_R}{T_R V_m + T_F V_R} \right)$$

Par analogie, on obtient alors :

$$W_{3'4'} = nRT_C \ln \left(\frac{T_R V_m + T_C V_R}{T_R V_M + T_C V_R} \right)$$

14. Le travail total fourni sur un cycle s'exprime : $W'_{fourni} = -W_{1'2'} - W_{3'4'} = 19,1kJ$

Pour le moteur de Stirling idéal, ce travail était : $W_{fourni} = -W_{12} - W_{34} = 24,8kJ$

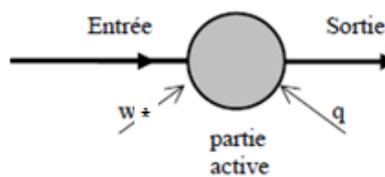
On observe donc une perte de travail par cycle de l'ordre de 22%, la puissance fournie par le moteur réel sera 22% plus faible que celle évaluée sans tenir compte du volume mort dans le régénérateur.

15. Dans le modèle étudié, le gaz et la source avec laquelle il échange de la chaleur sont toujours à la même température, que ce soit dans le cylindre chaud, le régénérateur ou le cylindre froid. On en conclut que ces échanges thermiques sont réversibles.

Aucune autre source d'irréversibilité des transformations n'est identifiable dans le système décrit, on peut donc en déduire que le fonctionnement de ce moteur reste réversible et que le rendement du moteur de Stirling dans ce modèle reste égal à celui du moteur de Carnot.

Problème 2 : Climatiseur.

Primaire du système de climatisation :



Le composant actif Comp est un système ouvert, étudié en régime permanent. On se ramène donc à l'étude d'un système fermé en définissant Σ par :

- $\Sigma(t)$ composé de Comp(t) et de la masse m de fluide qui entre dans ce composant entre les instants t et $t+\delta t$.
- $\Sigma(t+\delta t)$ composé de Comp($t+\delta t$) et de la masse m de fluide qui est sortie de ce composant entre les instants t et $t+\delta t$.

1.

Σ étant un système fermé, on peut lui appliquer le premier principe de la thermodynamique entre les instants t et $t+\delta t$: $(U(t+\delta t) + E_C(t+\delta t)) - (U(t) + E_C(t)) = W_u + Q + P_e V_e - P_s V_s$

Où $P_e V_e$ est le travail des forces de pression en entrée et $-P_s V_s$ celui en sortie.

$$(U(t) + E_C(t)) = (U_{comp}(t) + mu_e + E_{C,comp}(t) + E_{c,e})$$

$$\text{et } (U(t+\delta t) + E_C(t+\delta t)) = (U_{comp}(t+\delta t) + mu_s + E_{C,comp}(t+\delta t) + E_{c,s})$$

Le composant fonctionne en régime permanent et on suppose que la variation d'énergie cinétique est négligeable entre l'entrée et la sortie du composant, on obtient : $m(u_s - u_e) = m(w_u + q) + m(P_e v_e - P_s v_s)$

On obtient finalement comme traduction du premier principe, un bilan d'enthalpie pour chaque composant actif du système sous la forme : $h_s - h_e = w_u + q$

2. On exploite l'échelle logarithmique de l'axe des ordonnées :

- Entre $P = 1$ bar et $P = 10$ bars on mesure 6,3 cm.
- L'isobare à 5,2 bars se situe alors à $\log(5,2) * 6,3 = 4,5$ cm au-dessus de l'isobare $P = 1$ bar.
- De même l'isobare à 1,2 bars se situe à 0,5 cm au-dessus de l'isobare $P = 1$ bar.

3. L'abscisse du point L donne l'enthalpie massique de la phase liquide saturant h_L , celle du point G l'enthalpie massique de la phase vapeur saturante h_V . L'abscisse du point M donne l'enthalpie massique h d'un mélange diphasé de fraction massique x_V en vapeur et x_L en liquide.

Pour ce mélange diphasé, l'enthalpie étant une grandeur extensive, on peut écrire :

$$H = H_{liquide} + H_{vapeur} = m_L h_L + m_V h_V \quad \text{d'où l'enthalpie massique } h = x_L h_L + x_V h_V$$

Cette relation peut se réécrire : $x_L (h - h_L) + x_V (h - h_V) = 0$

Qui s'interprète graphiquement par le théorème des moments : $x_L \overline{LM} + x_V \overline{GM} = 0$

On sait alors que : $x_L + x_V = 1$ et la relation de Chasles : $\overline{GM} = \overline{GL} + \overline{LM}$ ce qui donne : $\overline{LM} = x_V \overline{LG}$

4. 1 est représenté par le point le long de l'isobare 1,2 bar, pour une fraction massique de 0,98, on utilise le résultat de la q3 pour le situer le plus précisément possible.
2 est situé sur la courbe de rosée à la pression 5,2 bar puisqu'il s'agit d'une vapeur saturante, et 3 situé sur la courbe d'ébullition à la pression 5,2 bar puisqu'il s'agit d'un liquide saturant.
La détente de 3→4 est signalée comme étant isenthalpique, 4 est donc situé sur l'isobare de pression 1,2 bar et l'enthalpie d'enthalpie massique h_3 .

Pour déterminer la fraction massique en gaz dans l'état 4, on exploite le résultat de la q3. On mesure :

$\overline{LM} = 3,3cm$; $\overline{LG} = 10,3cm$; on obtient $x_V^4 = 0,32$ Ce résultat est cohérent avec la position du point 4 relativement aux courbes iso-titres 0,3 et 0,4 observables sur le diagramme.

5. La seule transformation pour laquelle on n'a pas de renseignement précis sur les caractéristiques est la compression 1→2, c'est donc elle qu'on représente en pointillé.
6. On lit sur le diagramme : $h_1 = 580kJ.kg^{-1}$; $h_2 = 650kJ.kg^{-1}$; $h_3 = h_4 = 330kJ.kg^{-1}$
7. On applique le bilan d'enthalpie établi à la q1 aux différentes transformations :
- 1→2 : La compression est adiabatique et le système doit recevoir du travail pour aller en sens inverse de l'évolution naturelle entre deux états de pressions différentes. Toutes les autres étapes se font sans apporter de travail, on en déduit que : $h_2 - h_1 = w$
 - 2→3 : dans le condenseur, le fluide échange de la chaleur avec la source chaude sans qu'il ne lui soit fourni de travail, on en déduit que : $h_3 - h_2 = q_C$
 - 3→4 : dans le détendeur, la transformation est isenthalpique car le système est calorifugé et ne fournit pas de travail : $h_4 - h_3 = 0$
 - 4→1 : dans l'évaporateur, le fluide échange de la chaleur avec la source froide sans ne lui soit fourni de travail, on en déduit que : $h_1 - h_4 = q_f$

8. Pour ce système, la grandeur d'intérêt est la chaleur extraite de la source froide q_f et la grandeur à fournir est le travail w , l'efficacité est définie comme le rapport de ces deux grandeurs : $e = \frac{q_f}{w}$

On peut alors la ré-exprimer par : $e = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}$ A.N : $e = 3,6$

Pour la machine de Carnot équivalente fonctionnant entre une source froide de température $T_1 = 5^\circ C$ et une source chaude de température $T_2 = 52^\circ C$, l'efficacité de la machine de Carnot est évaluée par :

$$e_C = \frac{q_f}{w} = -\frac{q_f}{q_f + q_C} \text{ car le premier principe sur un cycle donne } q_f + q_C + w = \Delta_{cycle} h = 0$$

$$e_C = \frac{T_f}{T_C + T_f} \text{ car le second principe donne pour une machine réversible } \frac{q_f}{T_f} + \frac{q_C}{T_C} = \Delta_{cycle} s = 0$$

L'application numérique donne : $e_C = 5,90$

On observe comme attendu que l'efficacité de la machine reste inférieure à celle de la machine de Carnot équivalente qui doit être de rendement maximum en tant que machine réversible.

9. Dans le condenseur, le système passe de la vapeur saturante au liquide saturant, la variation d'entropie massique est donnée par : $s_3 - s_2 = \frac{h_3 - h_2}{T_2}$ d'après la relation $\Delta_{vap} s = \frac{\Delta_{vap} h}{T_{vap}}$

L'entropie d'échange s'exprime par : $s_{23}^e = \frac{h_3 - h_2}{T_{Ext}}$ c'est-à-dire le rappel du transfert thermique et de la température de la source fournissant cette chaleur.

En appliquant le second principe, on obtient pour l'entropie créée : $s_{23}^C = s_3 - s_2 - s_{23}^e$

$$\text{Soit } s_{23}^C = (h_3 - h_2) \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_{Ext}} \right) \quad \text{A.N : } s_{23}^C = 54,3 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

On obtient une entropie créée strictement positive, ce qui est le signe d'une transformation irréversible. Le transfert thermique ne peut s'effectuer ici que du fluide vers l'extérieur en suivant le sens décroissant de la température, on identifie clairement une cause d'irréversibilité, le résultat obtenu est donc cohérent.

Utilisation des coulis d'hydrates :

10. Etat initial (E): hydrate solide + eau liquide à 12°C Etat final (S) : hydrate liquide + eau liquide à 17°C Pour exprimer la variation d'enthalpie du système, on décompose la transformation en deux étapes en introduisant l'état intermédiaire (I) : hydrate liquide + eau liquide à 12°C.

La fraction massique en hydrate étant X, la variation d'enthalpie massique du système totale sera toujours sous la forme : $\Delta h = (1 - X)\Delta h_{eau} + X\Delta h_{hydrate}$

Première étape (E)→(I) : l'enthalpie massique de l'eau liquide ne varie pas, l'hydrate subit la fusion ce qui nous donne : $\Delta h_{EI} = Xl_{hyd}$

Seconde étape (I)→(S) : les deux éléments liquides subissent l'augmentation de température ce qui nous donne : $\Delta h_{IS} = [(1 - X)c_{eau} + Xc_{hyd}](T_{max} - T_{min})$

Puisque l'enthalpie massique est une grandeur d'état, on obtient pour la variation d'enthalpie massique totale :

$$\Delta h_{ES} = [(1 - X)c_{eau} + Xc_{hyd}](T_{max} - T_{min}) + Xl_{hyd} \quad \text{A.N : } \Delta h_{ES} = 58,9 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

11. On reprend le même raisonnement pour l'entropie massique.

Pour le changement de phase de l'hydrate, on sait que : $\Delta s = X \frac{l_{hyd}}{T_{min}}$

Pour l'augmentation de température, on applique le modèle de la phase indilatable et incompressible pour lequel

$$\Delta s = c_{syst} \ln \left(\frac{T_{final}}{T_{initial}} \right)$$

$$\text{On obtient au final : } \Delta s_{ES} = [(1 - X)c_{eau} + Xc_{hyd}] \ln \left(\frac{T_{max}}{T_{min}} \right) + X \frac{l_{hyd}}{T_{min}}$$

Pour l'entropie massique d'échange, on exprime d'abord par le premier principe la chaleur massique reçue par le fluide : $q = \Delta h_{ES}$ et on identifie l'intérieur de la pièce à climatiser comme le thermostat de température T_{int} avec

$$\text{lequel cette chaleur est échangée. On obtient alors : } s^e = [(1 - X)c_{eau} + Xc_{hyd}] \frac{(T_{max} - T_{min})}{T_{int}} + X \frac{l_{hyd}}{T_{int}}$$

Par application du second principe, on obtient :

$$s^C = [(1 - X)c_{eau} + Xc_{hyd}] \left[\ln \left(\frac{T_{max}}{T_{min}} \right) - \frac{(T_{max} - T_{min})}{T_{int}} \right] + xl_{hyd} \left(\frac{1}{T_{min}} - \frac{1}{T_{int}} \right)$$

A.N : $s^C = 5,45 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ A nouveau on constate que l'entropie créée est positive, signe d'une transformation irréversible. Les transferts thermiques du chaud vers le froid sont à nouveau une cause évidente d'irréversibilité.

12. La variation d'enthalpie si on envisage d'utiliser la totalité du réservoir s'exprime :

$$\Delta H = \mu_C V_S \Delta h_{ES} = 360 \text{ MJ}$$

L'énergie nécessaire pour faire fonctionner la climatisation à pleine puissance pendant 12h est :

$$E = P_{c_{lim}} \Delta t = 259 \text{ MJ}$$

La capacité de stockage est largement suffisante pour assurer le fonctionnement de la climatisation.

13. Pour renouveler le stock de coulis, il faut que sa variation d'enthalpie totale soit : $\Delta H = -\mu_C V_S \Delta h_{ES}$

Si le transfert thermique est totalement efficace, cette variation d'enthalpie s'identifie à la chaleur reçue de la part du fluide primaire dans l'évaporateur ce qui donne sur 6h de fonctionnement avec un débit massique D_m :

$$\Delta H = -q_f D_m \Delta t \quad \text{d'où l'expression du débit : } D_m = \frac{\mu_C V_S \Delta h_{ES}}{(h_1 - h_4) \Delta t} \quad \text{A.N : } D_m = 4 \text{ kg.min}^{-1}$$

