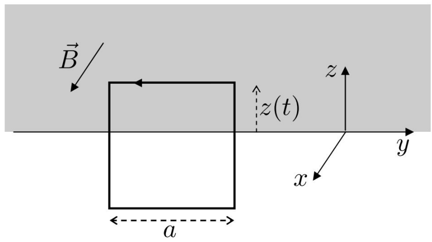
TD - Induction et conversion de puissance

1 Amortissement électromagnétique



On considère un cadre de côté a, masse m, résistance totale R et d'inductance négligeable.

Il se déplace dans une zone d'espace telle que : $\begin{cases} \vec{B}(z>0) = B_0\vec{e}_x \\ \vec{B}(z<0) = \vec{0} \end{cases}$

Le déplacement est tel que l'axe Oy passe toujours dans le cadre.

1 - Déterminer l'expression du courant $i(t)$ qui parcours le cadre en fonction de $a, \dot{z}, R$ et B_0 (rappel : orienter, flux de $\vec{B}$, circuit électrique équivalent, loi des mailles).

2 - Déterminer l'expression de la résultante de la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre (il faut sommer celle sur chaque côté).

3 - On prend $a = 10$ cm, $R = 10^{-4}\Omega$. L'idée est que ce dispositif peut servir d'amortisseur de voiture. Le cadre est alors solidaire de l'axe de la roue, et la zone qui produit $\vec{B}$ est solidaire du châssis. Ceci convient, puisqu'il s'exerce une force sur le cadre qui s'oppose à la vitesse verticale de la roue. Pour un amortisseur de véhicule, le coefficient de frottement doit être de l'ordre de $h = 10^4$ N/ $\left(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)$.

Quelle doit être l'intensité du champ magnétique à utiliser pour reproduire un tel amortissement ? Commentaire ? Quels seraient les avantages d'un tel amortissement pour un véhicule ?

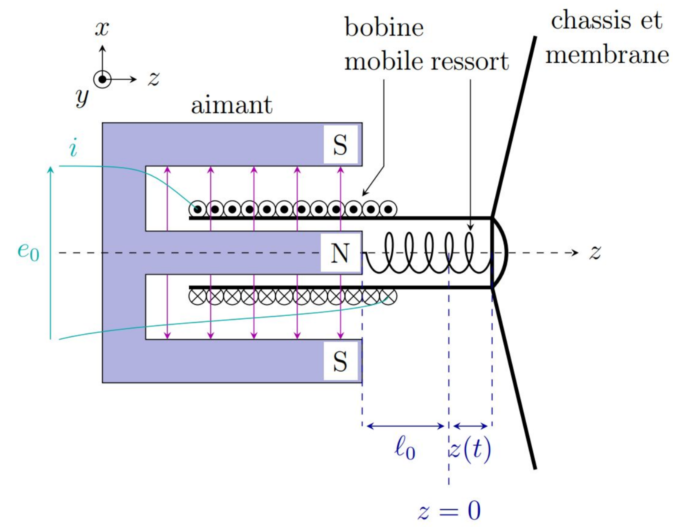
Rép : $i(t) = -\frac{a\dot{z}B_0}{R}$; $\vec{F} = -\frac{a^2\dot{z}B_0^2}{R}\vec{e}_z$; $B_0 = \frac{\sqrt{Rh}}{a} = 10$ T

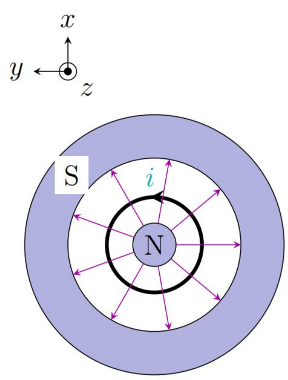
2 Étude d'un haut-parleur

Dans un haut-parleur, un aimant permanent fixe, de forme particulière (cf figure), crée dans son entrefer un champ magnétique radial de norme constante, $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_r$.

La membrane du haut-parleur est mobile. Elle est reliée au châssis fixe par une suspension appelée le "spyder", qu'on modélise ci-dessous par un ressort de longueur à vide l_0 et raideur k. Les forces de frottement avec l'air sont prises en compte par une force $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ s'exerçant sur la membrane, avec $\vec{v}$ la vitesse de celle-ci et $\lambda > 0$ une constante. Ces forces sont nécessairement présentes puisque la membrane interagit avec l'air pour produire une onde sonore.

La membrane est solidaire d'un bobinage de longueur totale l, qui peut se déplacer dans l'entrefer de l'aimant (cf schéma). On note R sa résistance totale et L son inductance propre. Un générateur extérieur impose une tension de commande $u(t) = u_0\cos\omega t$ dans ce bobinage. Le courant met alors en mouvement la membrane, et cette vibration va entraîner une mise en mouvement de l'air, et donc une onde sonore.





1 - Expliquer en trois mots pourquoi le passage du courant $i(t)$ impose un déplacement de la membrane. Dans quelle sens se déplace-t-elle si $i > 0$?

Équation mécanique

On admet que la résultante des forces de Laplace sur la bobine s'écrit

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobinage}} i\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \vec{B}_0 = -ilB_0\vec{e}_z$$

2 - On note $\vec{v} = v\vec{e}_z$ la vitesse de la membrane, m la masse de l'ensemble de ce qui est mobile. Écrire l'équation du mouvement suivie par $v(t)$.

3 - Quel est le lien entre la vitesse v et la position z ? Comment ceci se traduit-il en représentation complexe ?

4 - Montrer que l'équation mécanique s'écrit, dans la représentation complexe :

$$\left(\lambda + j\omega m + \frac{k}{j\omega}\right)\underline{v} = -lB_0\underline{i}$$

Équation électrique
5 - Un calcul direct de la fem e induite par le déplacement de la bobine dans le champ $\vec{B}_0$ est compliqué. Nous utilisons plutôt la relation de conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique :

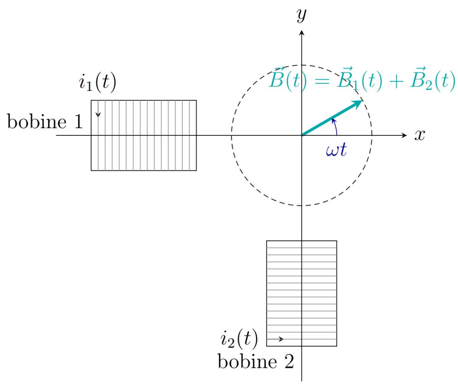
$$ei + \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = 0, \text{ avec } \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \vec{F}_L \cdot \vec{v}.$$

En déduire l'expression de e.
6 - Faire un schéma électrique équivalent au haut-parleur. Il doit comprendre le générateur $u(t)$, la résistance du bobinage, la fem e due au déplacement dans le champ $\vec{B}_0$, et une inductance L qui rend compte du phénomène d'auto-inductance du bobinage.
7 - **Étude énergétique :** A partir des équations mécanique et électrique démontrées précédemment, aboutir à une équation qui indique comment la puissance électrique ui délivrée au haut-parleur est répartie.
Remarque : Ces dispositifs sont réversibles, c'est-à-dire peuvent fonctionner en convertisseur de puissance électrique → mécanique ou mécanique → électrique. Le haut-parleur réalise une conversion électrique → mécanique ; le micro réalise l'opération inverse.

Rép : Si $i > 0$, déplacement vers les z négatifs ; $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -ilB_0 - \lambda v - kz$; $\left(\lambda + j\omega m + \frac{k}{j\omega}\right)\underline{v} = -lB_0\underline{i}$; $e = vB_0 l$; $u = -vB_0 l + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$; $ui = Ri^2 + \lambda v^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)$

3 Machine synchrone

Il existe une classe très importante de moteurs électriques qui génèrent un champ magnétique tournant afin d'entraîner en rotation le rotor (où vice-versa en mode générateur) : les machines synchrones et asynchrones.



a/ Production d'un champ tournant Un champ tournant est un champ de norme constante, mais dont la direction tourne à vitesse angulaire constante. On utilise plusieurs bobines alimentées par une tension sinusoïdale, déphasée différemment selon la bobine.
Prenons l'exemple de deux bobines, dont les courants sont : $i_1(t) = I_0 \cos\omega t$ et $i_2(t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2) = I_0 \sin\omega t$ Le champ magnétique produit par chaque bobine, en un point à proximité de l'axe, est proportionnel au courant et dirigé selon l'axe (cf figure ci-contre) :

$$\vec{B}_1(t) = ki_1(t)\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(t) = ki_2(t)\vec{e}_y.$$

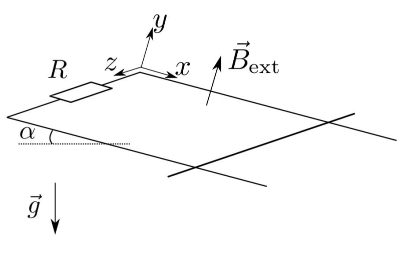
1 - En déduire l'expression du champ magnétique total et constater qu'il s'agit bien d'un vecteur de norme constante qui tourne à la vitesse angulaire ω.

Production d'un champ tournant
On produit un champ tournant en alimentant plusieurs bobinages par des tensions sinusoïdales déphasées.

On utilise deux bobines (décalées de $\pi/2$) dans le cas d'un réseau diphasé, ou trois (décalée de $2\pi/3$) dans le cas d'un réseau triphasé (ce qui est le cas dans les domaines industriels).
b/ Exemple du moteur synchrone
Dans un moteur synchrone, le stator produit un champ magnétique tournant à l'aide de plusieurs bobines alimentées avec un déphasage. Le rotor est un aimant permanent de moment magnétique $\vec{m}$ (ou une spire de courant parcourue par un courant constant I qui fait office de moment magnétique $\vec{m}$). Le couple qu'exerce le champ tournant $\vec{B}$ sur le moment $\vec{m}$ tend à toujours aligner $\vec{m}$ avec $\vec{B}$, et ceci entraîne donc le moment magnétique en rotation et donc tout le rotor.
Une telle machine est dite synchrone car le champ et le moment magnétique tournent à la même vitesse angulaire en régime permanent.
On considère ici un moteur synchrone et une modélisation simple :
- Le rotor est assimilé à un moment magnétique $\vec{m}$ dont la direction de $\vec{m}$ tourne à la vitesse angulaire ω'.
- Les bobinages statoriques produisent un champ magnétique $\vec{B}$ tournant à la vitesse angulaire ω, de norme constante.
- Le couple moteur exercé sur le rotor, résultant des actions de Laplace, est ainsi donné par $\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}$
- On se place en régime permanent.
On prendra 50 tours par seconde pour la rotation du champ magnétique, $m = 8\ \mathrm{A \cdot m^2}$, et $B = 0,2$ T.
2 - D'après le principe du moteur synchrone exposé ci-dessus, que dire de ω et de ω' ? Et donc de l'angle $\theta = (\vec{m}, \vec{B})$?
3 - Donner l'expression du couple moteur $\vec{\Gamma}_L$ en fonction de $m = \|\vec{m}\|, B = \|\vec{B}\|$ et θ.
4 - Que vaut θ pour un fonctionnement à vide (couple fourni nul) ?
Et pour un couple moteur $\Gamma_c = 0,65\ \mathrm{N \cdot m}$? Dans ce dernier cas donner également la puissance fournie par le moteur.
5 - La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ?
Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

Rép : $\vec{B}(t) = kI_0(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$; $\vec{\Gamma}_L = mB\sin\theta\vec{e}_z$; $\theta = 0$ et $\theta = 24°$; $\mathcal{P} = 2,0 \times 10^2$ W ; $\Gamma_{\max} = 16\ \mathrm{N \cdot m}$

4 Rails de Laplace inclinés



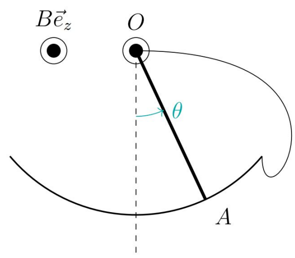
On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. Il est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La longueur du rail mobile entre les deux points de contact est notée a. Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$ est constant et uniforme à travers le circuit.
1 - Expliquer intuitivement ce qu'il va se produire (création d'un courant ? dans quel sens ? quel effet sur le rail ?)
2 - Établir l'équation électrique du circuit. Quel va être le signe de i d'après cette équation ?

3 - Établir ensuite l'équation mécanique. On négligera tout frottement. On commencera par poser le problème avec un schéma sur lequel figurent toutes les forces en présence. Puis on se demandera quel est l'axe qui nous intéresse pour le mouvement en question afin de projeter.
4 - En déduire enfin une équation portant sur la vitesse de la tige.
5 - On se place en régime permanent, où les grandeurs ne varient plus.
a - Quel temps caractéristique faut-il attendre pour que ce soit le cas ?
b - Donner alors l'expression de la vitesse et du courant.
c - Effectuer un bilan de puissance en comparant la puissance mécanique reçue par la tige suite à l'action de la pesanteur, et la puissance électrique reçue par la résistance R (qui symbolise un appareil électrique quelconque que l'on souhaite alimenter).

Rép : $-B_{\text{ext}}av = Ri$; $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iaB_{\text{ext}} + mg\sin\alpha$; $\tau = \frac{mR}{(aB_{\text{ext}})^2}$; $v = \frac{mRg\sin\alpha}{(aB_{\text{ext}})^2}$; $\mathcal{P}_{\text{méca reçue par tige}} = \mathcal{P}_{\text{élec reçue par R}}$

5 Pendule amorti par induction

On considère un pendule rigide OA, homogène, de masse m et de longueur l, libre de tourner autour d'un axe horizontal (Oz) passant par une de ses extrémités. On note $J = \frac{1}{3}ml^2$ son moment d'inertie par rapport à cet axe. Le centre de masse G de la tige est situé en son milieu. Le pendule est repéré par l'angle θ qu'il forme avec la verticale.
La tige est en contact en A avec un rail métallique ce qui forme un circuit électrique. L'ensemble est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On note R la résistance électrique de l'ensemble du circuit.

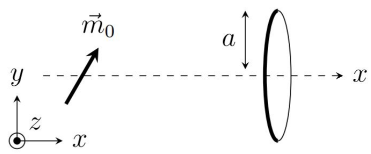


1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ avec la verticale.
2 - On suppose les oscillations de petite amplitude. Montrer que si le champ magnétique est suffisamment fort, lorsqu'on écarte la tige de sa position d'équilibre, elle y retourne sans osciller.

Rép : $i = \frac{Bl^2\dot{\theta}}{2R}$; $\ddot{\theta} + \frac{3l^2B^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0$; $B \geqslant \left(\frac{32}{3}\frac{gm^2R^2}{l^5}\right)^{1/4}$;

6 Principe d'un générateur synchrone

On étudie le principe d'un générateur de courant alternatif (transformation d'un mouvement mécanique en électricité). Un aimant de moment magnétique $\vec{m}_0$ est placé dans le plan (Oxy). Un système mécanique le met en rotation à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz). Une spire circulaire de rayon a et de résistance R est placée sur l'axe (Ox) à distance $x \gg a$. On négligera l'inductance propre de la spire.



1 - Déterminer l'expression du flux du champ magnétique à travers la spire (on supposera que $\vec{B}$ est de valeur uniforme à travers la spire).
Données : en coordonnées polaires d'axe colinéaire à $\vec{m}$, un moment magnétique $\vec{m}$ placé à l'origine crée en un point M suffisamment loin un champ magnétique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

Déterminer l'intensité i du courant induit dans la spire.
En déduire la puissance électrique instantanée qu'elle reçoit.
On peut se demander d'où provient cette puissance électrique. La réponse est qu'elle provient d'une puissance que l'on fournit pour faire tourner l'aimant. Mais s'il y a une puissance fournie à l'aimant, c'est qu'un couple résistif s'exerce sur lui. Quelle est l'origine de ce couple ? La puissance associée redonne-t-elle bien la puissance électrique transmise ? C'est ce que nous allons voir dans la suite.
2 - Exprimer le couple magnétique subi par l'aimant, qui est dû à l'action du champ magnétique induit dans la spire.
3 - Quel puissance le système mécanique doit-il fournir à l'aimant pour maintenir la vitesse constante ? Conclure : en quoi a-t-on modélisé un générateur électrique rudimentaire ?

Rép : $e = \frac{\mu_0 a^2 m_0\omega}{2x^3}\sin\omega t$; $\mathcal{P}_{\text{élec spire}} = \frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2\omega^2}{4Rx^6}\sin^2\omega t$; $\vec{m}_s pire = \pi a^2 i\vec{e}_x$; $\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2\omega}{4Rx^6}\sin^2\omega t\vec{e}_z$; $\mathcal{P}_{\text{fournie à l'aimant}} = \frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2\omega^2}{4Rx^6}\sin^2\omega t$