

Lois de l'induction - Cas du circuit fixe dans $\vec{B}$ variable

Ce qu'il faut connaître

- Quelle est l'expression du flux d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme à travers une surface S plane de normale $\vec{n}$?
- Que dit la loi de modération de Lenz?
- Comment s'écrit la loi de Faraday pour la force électromotrice induite e ?
- Comment est définie l'inductance propre L d'un circuit? (en termes du flux propre et du courant)
- Quel est l'ordre de grandeur de l'inductance d'une bobine?
- Rappeler l'expression de l'énergie stockée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant i .
- Comment est définie l'inductance mutuelle M entre deux circuits? (en termes du flux et de courant)
- Comment s'écrit le flux total $\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1}$ du champ magnétique à travers un circuit d'inductance L_1 parcouru par un courant i_1 , couplé magnétiquement (coefficient M) à un circuit 2 parcouru par un courant i_2 ?
- Citer des applications du phénomène d'inductance mutuelle.

Ce qu'il faut savoir faire

- Savoir évaluer le flux d'un champ $\vec{B}$ uniforme à travers un contour fermé plan orienté.
- Utiliser la loi de Lenz pour prédire le sens du courant induit, ou les effets attendus du phénomène d'induction
- Utiliser la loi de Faraday, en précisant les conventions d'algébrisation.
- Mener l'étude d'un système siège d'un phénomène d'auto-induction.
- Conduire un bilan de puissance ou d'énergie dans un tel système, en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent
- Établir l'expression du coefficient d'inductance mutuelle dans le cas de deux bobines.
- Mener l'étude d'un système siège d'un phénomène d'auto-induction et d'induction mutuelle.
- Pour deux circuits électriques, chacun à une maille, couplées par induction mutuelle, établir le système d'équat en RSF en réalisant des schémas électriques équivalents.
- Conduire un bilan de puissance ou d'énergie dans un tel système.
- Cas du transformateur de tension idéal : établir la loi des tensions.

Méthode : Établir l'équation électrique d'un circuit siège de phénomènes d'induction.

1 - Orienter : si ce n'est pas déjà fait, préciser le sens choisi pour le courant. Ceci fixe alors l'orientation du contour, ainsi que celle de la normale à la surface qui s'appuie sur le contour (règle de la main droite).

2 - Exprimer le flux $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{propre}}$ du champ magnétique à travers le circuit. (Attention, son signe va dépendre de l'orientation choisie!)

Ce flux inclut :

- celui du champ imposé par l'extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$, qui s'écrit

$$\begin{cases} -\Phi_{\text{ext}} = \vec{B}_{\text{ext}} \cdot S\vec{n} & \text{dans le cas général,} \\ -\Phi_{\text{ext}} = \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 & \text{s'il s'agit du flux d'un circuit 2 à travers le circuit 1.} \end{cases}$$

- le flux propre (flux du champ $\vec{B}$ créé par le circuit à travers lui-même), qui s'écrit

$$\begin{cases} -\Phi_{\text{propre}} = \vec{B}_{\text{produit par le circuit}} \cdot S\vec{n} & \text{dans le cas général,} \\ -\Phi_{\text{propre}} = \Phi_{1 \rightarrow 1} = L i_1 & \text{s'il s'agit du flux d'un circuit 1 à travers le circuit 1 (si on connaît L)} \end{cases}$$

On néglige ou non Φ_{propre} selon les cas.

3 - Schéma électrique équivalent : faire un schéma électrique équivalent où apparaissent :

- Le courant dans le même sens que précédemment.

- Un générateur induit, **orienté dans le sens positif choisi**, de f.e.m $e = -\frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt}$.

- Si existants, résistance, capacité, inductance propre du reste du circuit.

4 - Loi des mailles : Écrire enfin l'équation électrique en appliquant une loi des mailles

Remarque : dans le chapitre suivant, le circuit pourra comporter des parties mobiles (rail de Laplace, moteur électrique). Alors il faudra aussi établir l'équation mécanique : calcul de la force ou du moment du aux actions de Laplace sur les parties mobiles, puis application du principe fondamental de la dynamique.

Exercice C1 - Loi de Lenz et loi de Faraday

On considère une spire circulaire fermée de rayon r et de résistance électrique totale R . On approche un aimant de la spire (schéma ci-contre).

1 - Prédire le sens du courant induit en utilisant la loi de modération de Lenz.

2 - On donne l'expression du champ magnétique produit par l'approche de l'aimant au niveau

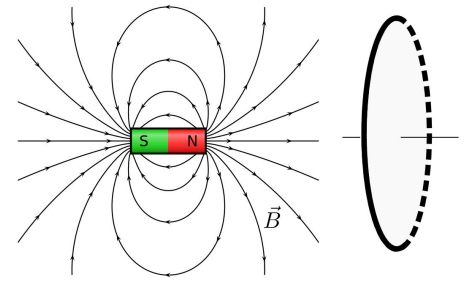
de la spire (et on le supposera approximativement uniforme sur la spire) : $\vec{B} = B_0 \frac{t}{T} \vec{e}_z$.

t est le temps, et B_0 et T sont des constantes. On cherche alors l'expression du courant i dans la spire.

a - (étape 1 : orientation) Faire un choix d'orientation du contour du circuit, tracer la normale $\vec{n}$ et le sens du courant i .

b - (étape 2 : exprimer Φ) Donner l'expression du flux Φ du champ magnétique de l'aimant à travers la spire, en fonction de B_0, t, T et r .

c - (étapes 3 et 4 : schéma électrique, loi de Faraday, loi des mailles) Faire un schéma électrique équivalent de la spire. Donner l'expression de la fem induite dans le circuit de la spire par le mouvement de l'aimant (loi de Faraday) (on ne tient pas compte du phénomène d'autoinduction, qui sera vu dans la partie II). En déduire l'expression du courant induit en fonction de R, r, B_0 et T . Le sens du courant obtenu est-il en accord avec le résultat de la question 1 ?



Exercice C2 - Calcul du coefficient d'inductance propre d'une bobine

On considère une "bobine", que l'on modélise comme un enroulement de N spires sur une longueur l d'axe z , avec un rayon a .

Lorsque cette bobine est parcourue par un courant i , il se crée un champ magnétique $\vec{B}$ dont on donne l'expression $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$ (ceci est valable dans la bobine, pas trop près des bords, et sera démontré l'an prochain), avec $n = N/l$ le nombre de spires par unité de longueur.

1 - Dessiner l'allure des lignes de champ dans la bobine.

2 - On considère une spire de la bobine. Donner son orientation sur un schéma (rappel : c'est le courant qui donne cette orientation).

Puis donner l'expression du flux Φ_{unspire} de $\vec{B}$ à travers cette spire.

3 - En déduire l'expression du flux propre de $\vec{B}$ à travers toute la bobine.

4 - Rappeler la définition de l'inductance L d'un circuit, puis donner son expression pour la bobine en fonction de μ_0, n , et du volume $V = \pi a^2 l$ de la bobine.

5 - A.N. pour $l = 50 \text{ cm}$, $a = 3,0 \text{ cm}$, $N = 1000$ spires (et on donne $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$).

Exercice C3 - Calcul d'un coefficient d'inductance mutuelle

Deux solénoïdes S_1 et S_2 de même axe (Oz), de même longueur l , même nombre de spires N et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ sont emboîtés l'un dans l'autre.

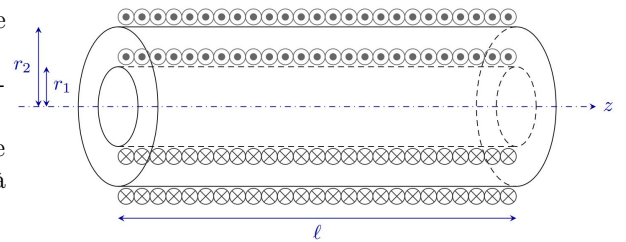
En première approximation, le champ magnétique produit à l'intérieur du solénoïde p ($p = 1$ ou 2) est $\vec{B}_p = \mu_0 n_p i_p \vec{e}_z$.

Comme le champ créé par la bobine 2 est uniforme à l'intérieur de la bobine 1, alors que la réciproque n'est pas vraie, il est plus simple de calculer M à partir du flux créé par 2 au travers de 1.

1 - Déterminer l'expression du flux $\Phi_{\text{une spire}}$ du champ magnétique créé par la bobine 2 à travers une spire de la bobine 1.

En déduire l'expression du flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ créé par la bobine 2 au travers de la bobine 1, en fonction de r_1, μ_0, N, l et i_2 .

2 - En déduire l'expression du coefficient d'induction mutuelle M entre les deux bobines.



Exercice C4 - Couplage inductif de deux circuits

On considère deux circuits couplés magnétiquement. La constante de couplage est notée M .

Attention, le signe de M dépend de l'orientation des courants i_1 et i_2 , et on conservera donc celle de la figure. L'inductance propre de chaque circuit est notée L_1 et L_2 .

On suit les étapes de la méthode "établir l'équation électrique d'un circuit" (sauf qu'ici il y a deux circuits), d'où la numérotation qui commence à 2 pour coïncider avec les étapes (car l'étape 1 d'orientation est déjà faite).

2 - Etape 2 : donner l'expression du flux du champ magnétique total à travers le circuit 1, en fonction de i_1, i_2 , et de L_1 et M . On rappelle qu'il s'agit la somme du flux propre (du champ créé par 1 passant à travers 1) et du flux externe (du champ créé par 2 passant par 1). Faire de même pour le flux à travers le circuit 2.

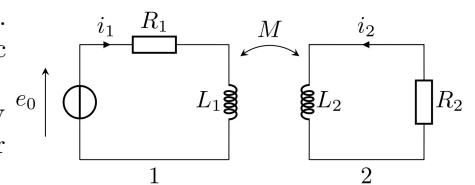
3 - Etape 3 : Faire un schéma électrique équivalent du circuit, qui fait apparaître les générateurs de tension e_1 et e_2 dus au phénomène d'induction. Attention à leur orientation : quelle convention ?

Donner l'expression des tensions induites e_1 et e_2 .

4 - Etape 4 : En déduire les deux équations électriques qui régissent le fonctionnement de ce circuit.

5 - On se place ensuite en régime harmonique (ou RSF) à la pulsation ω : $e_0(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Écrire l'équivalent en complexe des équations obtenues à la question précédente.



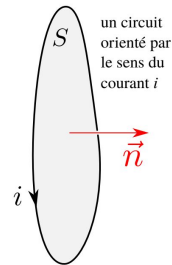
I. Description du phénomène d'induction

1. Flux d'un champ magnétique

a. Contour, surface, orientation

Selon la règle du tire-bouchon ou main droite :

On CHOISIT un sens positif ARBITRAIRE selon lequel i est compté positivement, l'orientation de $\vec{S} = S\vec{n}$ en découle.



b. Flux du champ magnétique

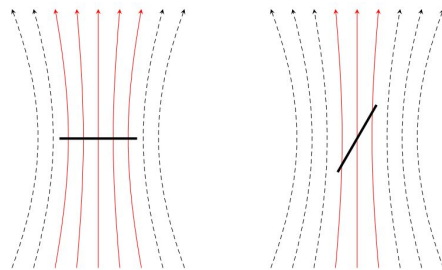
Définition : Φ

On appelle flux du champ magnétique à travers la surface S :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} \quad (= \vec{B} \cdot \vec{S} \text{ si } \vec{B} \text{ est uniforme et } S \text{ plane})$$

Signification : le flux du champ magnétique donne la quantité de champ magnétique qui passe à travers la surface, ou dit autrement, le "nombre" de lignes de champ qui traversent la surface.

Par exemple sur le schéma ci-contre, le flux Φ de $\vec{B}$ est plus grand à travers le contour de gauche qu'à travers celui de droite.



2. Le phénomène d'induction

a. Expériences

⇒ Dans tous les cas où il y a une variation du flux du champ magnétique à travers un circuit fermé, il y a apparition d'un courant. On parle de **courant induit** (il est induit par la variation du flux de $\vec{B}$), et de **phénomène d'induction**.

b. Loi de modération de Lenz

Loi de modération de Lenz

Les phénomènes d'induction s'opposent aux causes qui les produisent et tendent à les ralentir.

Le courant induit dans le circuit va à son tour produire un champ magnétique, puisqu'on est alors en présence d'une spire parcourue par un courant.

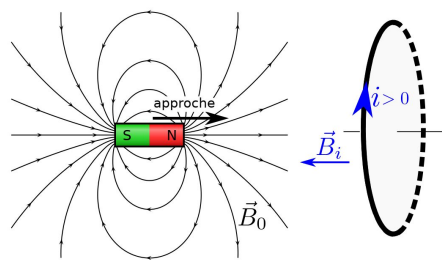
Notons $\vec{B}_0$ le champ magnétique externe (par exemple celui produit par l'aimant), et $\vec{B}_i$ le champ magnétique produit par le courant induit i dans le circuit.

Ici le phénomène d'induction produit le champ magnétique $\vec{B}_i$. La cause de production de i est la variation du flux de $\vec{B}_0$ à travers le circuit. Donc $\vec{B}_i$ va être tel qu'il s'oppose à la variation de $\vec{B}_0$ à travers le circuit :

Si on approche l'aimant, face nord vers le circuit : $\vec{B}_0$ est dirigé vers la droite et augmente en norme.

→ $\vec{B}_i$ s'oppose à cette augmentation d'après la loi de Lenz : il est donc dirigé vers la gauche pour réduire $\vec{B}_{\text{total}}$

→ Règle de la main droite/tire bouchon : i induit (qui produit $\vec{B}_i$) est comme sur la figure ci-contre.



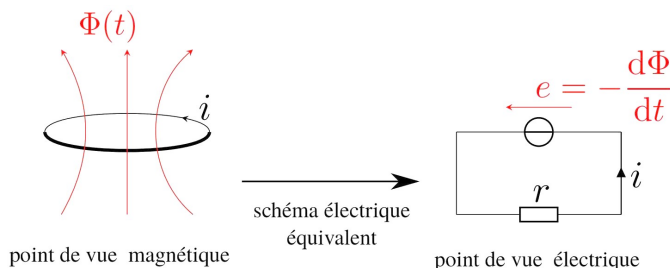
c. Loi de Faraday

Elle donne la valeur de la tension responsable du courant induit.

Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ATTENTION A L'ORIENTATION : Le sens du générateur est donné par l'orientation de la surface!!!!



Lire la méthode générale de résolution des problèmes d'induction, puis faire l'EC1.

II. Induction propre ou auto-induction

Si la spire (ou un circuit de manière plus générale) est parcourue par un courant, elle crée elle aussi un champ magnétique, et ce champ possède un flux à travers la spire. On parle de flux propre, et de phénomène d'auto-induction.

1. Flux propre et coefficient d'inductance propre

Soit un circuit parcouru par un courant i (soit parce qu'il y a un générateur dans le circuit, soit parce que i est induit par une cause externe).

Ce courant i produit un champ magnétique $\vec{B}_{\text{propre}}$ (indice "propre" car c'est le champ créé par le circuit : c'est son propre champ).

D'où : $\Phi_{\text{propre}} = \iint_{S_1} \vec{B}_{\text{propre}} \cdot d\vec{S}$.

On peut aussi le noter, si le circuit est appelé circuit 1, $\Phi_{\text{propre}} = \Phi_{1 \rightarrow 1}$ (flux du circuit 1 à travers le circuit 1).

Le champ magnétique produit est proportionnel au courant i . Donc le flux également.

Flux propre et inductance propre

Soit un circuit parcouru par un courant i , orienté selon ce courant, de normale correspondante $\vec{n}$. Ce courant produit un champ $\vec{B}_{\text{propre}}$, dont le flux à travers le circuit lui-même s'écrit :

$$\Phi_{\text{propre}} = Li$$

Cette relation **définit** L , inductance propre du circuit, et permet de la calculer

- On a toujours $L > 0$. Sa valeur dépend de la géométrie du circuit.
- Unité SI de L : le henry (H).

↪ Faire l'EC2

2. Comparaison des points de vue électrocinétique/induction

3. Étude énergétique

Soit un circuit d'inductance L (bobine, ou le circuit lui-même) et de résistance totale R , alimenté par un générateur e_g . On a l'équation électrique :

$$e_g = Ri + L \frac{di}{dt}$$

↪ Multiplions la par i :

$$\underbrace{e_g i}_{\text{puissance fournie par générateur}} = \underbrace{Ri^2}_{\text{puissance perdue par effet Joule}} + \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\text{énergie stockée sous forme de champ } \vec{B}}$$

4. Retour sur la loi de Lenz

Prenons une bobine alimentée par un générateur. Supposons que $e_g = E$ constant pendant un long moment, puis à $t = 0$ on coupe cette alimentation (e_g devient nul). Nous avons déjà résolu ceci en électronique : on obtient

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = L/R$$

Ainsi le courant ne tombe pas à 0 immédiatement : il faut un temps de l'ordre de quelques $\tau = L/R$. Ce sont les phénomènes d'induction qui sont responsable de ceci, et c'est en accord avec la loi de Lenz : les phénomènes d'induction s'opposent aux causes qui les produisent et tendent à les ralentir. Ici, les phénomènes d'induction empêchent une variation brutale de i , et ils le font en produisant un courant induit (l'énergie est restituée par la bobine)

III. Couplage entre deux circuits, induction mutuelle

1. Flux mutuel et coefficient d'induction mutuelle

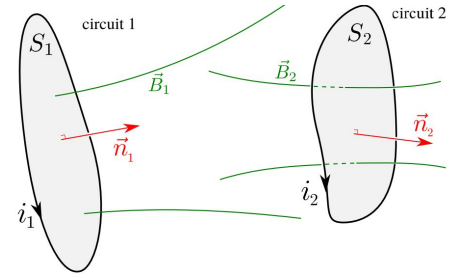
a. Expression des flux

Il y a deux contributions au flux de $\vec{B}$ à travers le circuit 2 :

- Le flux propre $\Phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 i_2$, où L_2 est l'inductance propre du circuit 2 .
- Le flux du champ $\vec{B}_1$ (créé par le circuit 1) à travers le circuit 2 : $\Phi_{1 \rightarrow 2}$.

Comme $\vec{B}_1$ est créé par le courant i_1 , il lui est proportionnel. Donc le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ également.

On a donc $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1$ avec M_{12} un coefficient de proportionnalité analogue au coefficient L_2 , appelé coefficient d'inductance mutuelle.



Le même raisonnement peut être mené pour l'autre circuit.

On admet que les coefficients d'inductance mutuelle M_{12} et M_{21} qui apparaissent sont toujours égaux (on le montrera sur un cas particulier). On note ainsi $M = M_{12} = M_{21}$.

Couplage inductif entre deux circuits

On a donc
$$\begin{cases} \Phi_{\text{tot} \rightarrow 1} = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_{\text{tot} \rightarrow 2} = \Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1. \end{cases}$$

- L_1 et L_2 inductances propres des circuits 1 et 2 ($L_1 > 0, L_2 > 0$)
- M coefficient d'induction mutuelle, **positif ou négatif en fonction du choix d'orientation des deux circuits**.
- L et M (en Henry) ne dépendent que de la géométrie des circuits (et pour M de leurs positions respectives).

Faire l'EC3.

2. Le phénomène d'inductance mutuelle, équations couplées

Faire l'EC4.

3. Étude énergétique

Reprenons la fin de l'EC3. La loi des mailles dans chacun des circuits a mené à :

$$\begin{cases} e_0 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 \end{cases}$$

Multiplions l'équation du circuit 1 par i_1 , celle du circuit 2 par i_2 , et faisons la somme des deux :

$$\underbrace{e_0 i_1}_{\text{puissance fournie par générateur}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{puissance perdue par effet Joule}} + \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)}_{\text{énergie stockée sous forme de champ } \vec{B}}.$$

Énergie magnétique stockée dans deux circuits couplés

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2,$$

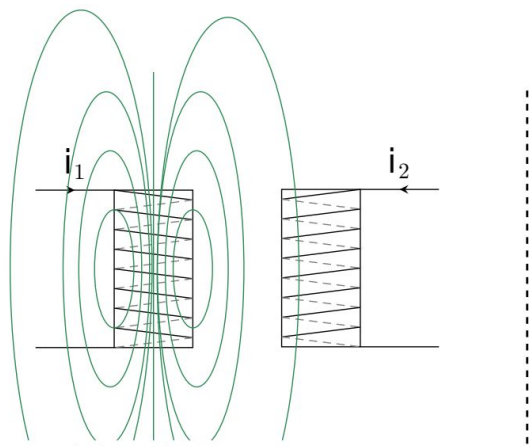
Le terme $\mathcal{E}_{\text{couplage}} = M i_1 i_2$ représente l'énergie de couplage magnétique entre les circuits.

4. Application : le transformateur de tension

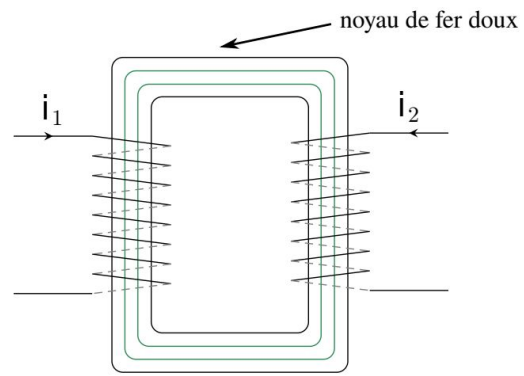
Le transformateur est un élément clé de la distribution d'électricité. Il permet d'abaisser ou d'élever la tension d'une source alternative ex. : pour passer des hautes tensions du réseau EDF aux tensions d'une habitation).

Il y a un circuit primaire qui est un bobinage de N_1 spires, et un circuit secondaire qui est un bobinage de N_2 spires, qui ne sont pas reliés entre eux électriquement, mais couplés magnétiquement de sorte à ce que le coefficient M soit maximal.

Ceci est réalisé en utilisant un matériau ferromagnétique qui guide les lignes de champ entre les deux bobinages, voire en enroulant les deux bobinages les uns sur les autres selon un tore.



Deux bobines dans l'air :
le bobinage secondaire n'intercepte pas beaucoup
de lignes de champ produites par le circuit primaire.
Couplage faible.



Deux bobines avec un matériau magnétique
qui guide les lignes de champs :
le bobinage secondaire intercepte presque toutes
de lignes de champ produites par le circuit primaire.
Couplage fort.

Sous certaines hypothèses d'idéalité, le rapport des tensions aux bornes de chaque enroulement est donné par la relation :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (\text{démonstration en TD})$$