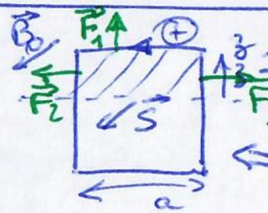
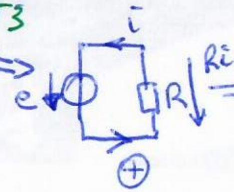
TD Induction – Conversion

Amortissement électromagnétique



1) $\phi \overset{\text{ligne}}{=} a z B_0$, $e = -\frac{d\phi}{dt} = -a\dot{z} B_0$

$\Leftrightarrow$



$\Longrightarrow e = Ri = -a\dot{z}B_0$

$\Rightarrow \boxed{i = -\frac{a\dot{z}B_0}{R}}$

2) $i > 0$ car $\dot{z} < 0 \rightarrow$ orientations de $\vec{F_L}$ sur le dessin … cohérent avec Lenz : $\vec{F_1}$ s'oppose à la chute, responsable de l'induction

$\vec{F_2} + \vec{F_3} = 0$, $\boxed{\vec{F_1} = iaB_0\vec{e_z} = -\frac{a^2\dot{z}B_0^2}{R}\vec{e_z}}$

3) On peut poser $\vec{F_1} = -h\vec{v}$, $(\vec{v} = \dot{z}\vec{e_z})$, avec $h = \frac{(aB_0)^2}{R}$

Il faut $B_0 = \frac{\sqrt{Rh}}{a} = 60\,T$ (impossible pour 1 aimant, possible pour 1 électroaimant puissant. Avantage : pas d'"usure" du fluide).

Haut parleur

1) Force Laplace sur la bobine : (fine brochon) $\Rightarrow$ si $i > 0$, $\vec{F_L}$ vers $-\vec{e_z}$.

2) PFD à la bobine ds R_T gal, en proj sur $\vec{e_z}$

$$m\frac{dv}{dt} = -ilB_0 - \lambda v - kz \quad (1)$$

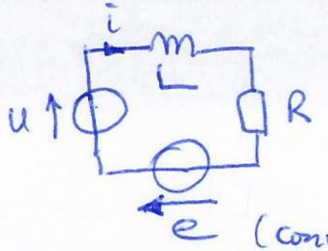
3) $v = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \underline{v} = j\omega\underline{z}$

4) $(1) \Leftrightarrow jm\omega\underline{v} = -lB_0\underline{i} - \lambda\underline{v} - k\underline{z}$

or $\underline{z} = \frac{\underline{v}}{j\omega} \Rightarrow \left(\lambda + j\omega m + \frac{k}{j\omega}\right)\underline{v} = -lB_0\underline{i}$

5) $\vec{F_L}\cdot\vec{v} + ei = 0 \Leftrightarrow ei = -(-lB_0 i) \Rightarrow \boxed{e = vB_0 l}$

6)



Loi des mailles :

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} - vB_0 l$$

(convention générateur !)

7)
$$\begin{cases} mv\frac{dv}{dt} = -ilB_0 v - kzv - \lambda v^2 & (\times v) \quad (1) \\ ui = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} - vB_0 li & (\times i) \quad (2) \end{cases}$$

(1) − (2) permet d'éliminer le terme ilB_0v :

$$mv\frac{dv}{dt} + kzv_z + \lambda v^2 = ui - Ri^2 - Li\frac{di}{dt}$$

soit $\underbrace{ui}_{\mathcal{P}_{\text{géné}}} = \underbrace{Ri^2 + \lambda v^2}_{\mathcal{P}_{\text{frotts, Joule}}} + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)}_{\text{Energie stockée – bobine – ressort – cinétique}}$

Machine synchrone

1) $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} = kI_0(\cos\omega t\,\vec{e_x} + \sin\omega t\,\vec{e_y})$

vecteur tournant à ω.

2) Rotor synchrone, $\Rightarrow \omega = \omega'$, $\theta = \text{cste}$ en régime permanent

3) $\vec{\Gamma_L} = \vec{m} \wedge \vec{B} = mB\sin\theta\,\vec{e_z}$

4) $\Gamma_L = 0 \Rightarrow \theta = 0$

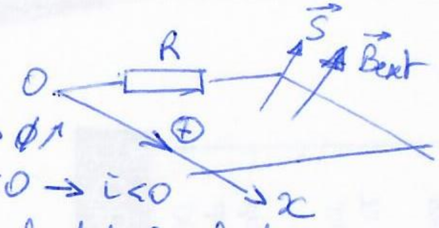
$\Gamma_L = \Gamma_C \Rightarrow mB\sin\theta \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{\Gamma_C}{mB} = 24°$

Alors $\mathcal{P} = \Gamma\omega = 0{,}65 \times 2\pi\times 50 \simeq 200\,W$

5] • ω donnée par le champ stator, indep de la charge

• Γ_{max} pour $\sin\theta = 1 \Rightarrow \Gamma_{max} = mB = 16\ \mathrm{N \cdot m}$

Rails de Laplace inclinés



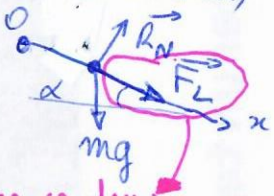
1) Lenz : La barre descend $\rightarrow \phi \nearrow$

$\rightarrow$ création de e induit $<0 \rightarrow i<0$

$\rightarrow \vec{F}_L$ vers le haut, ralentit la chute

2) Avec x abscisse de la barre, $\phi = a x B_{ext}$

$\Rightarrow e = -a\dot{x}B_{ext} \Rightarrow i = -a\dot{x}\dfrac{B_{ext}}{R}$ (1) (dans sens ⊖ sur le dessin)

3) 

PFD en proj sur Ox :

$m\dot{v} = i a B_{ext} + mg\sin\alpha$ (2)

⚠ Sur ce dessin, on ne présume pas de l'orientation finale de $\vec{F}_L$, on dessine $\vec{F}_L$ "algébrique" : on suppose i dans le sens ⊕ choisi, et on fait le produit vectoriel. (Comme i sera trouvé négatif, $\vec{F}_L$ sera bien vers le haut)

4) (1) et (2) $\Rightarrow \dot{v} = -\dfrac{(aB_{ext})^2}{mR}v + g\sin\alpha$ $\left(\Leftrightarrow \dot{v} + \dfrac{v}{\tau} = g\sin\alpha\right)$

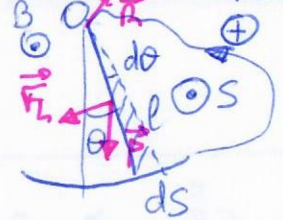
5) Régime permanent, pour $t \gtrsim 5\tau$, avec $\tau = \dfrac{mR}{(aB_{ext})^2}$

Alors $\dot{v} = 0 \Rightarrow v = \dfrac{mRg\sin\alpha}{(aB_{ext})^2}$, $i = -\dfrac{B_{ext}av}{R} = -\dfrac{mg\sin\alpha}{aB_{ext}}$

6) $P_{méca} = m\vec{g}\cdot\vec{v} = mgv\sin\alpha = mg\left(\dfrac{mRg\sin\alpha}{(aB_{ext})^2}\right)\sin\alpha$

$P_{elec} = Ri^2 = R\left(\dfrac{mg\sin\alpha}{aB_{ext}}\right)^2 \Rightarrow \boxed{P_{elec} = P_{méca}}$

Pendule amorti par induction



1) • Orientation $\Rightarrow$ Si θ varie de $d\theta$, S varie de $dS = -\ell^2\dfrac{d\theta}{2}$ (cf loi des aires ...) $S\searrow$

D'où $e = -\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{1}{2}B\ell^2\dot{\theta}$, et $i = \dfrac{B\ell^2\dot{\theta}}{2R}$

• $\vec{F}_{Laplace}$ régulièrement répartie le long de la barre $\Rightarrow$ elle s'exerce au milieu de la barre (comme le poids).

TMC en O : $J\ddot{\theta} = -F_L\dfrac{\ell}{2} - mg\dfrac{\ell}{2}\sin\theta$ (bras de levier...)

$(\mathcal{M}(\vec{R}) = 0)$

$\Rightarrow$ (avec $\vec{F}_L = i\ell\vec{e_r}\wedge B\vec{e_z} = -i\ell B\vec{e_\theta}$)

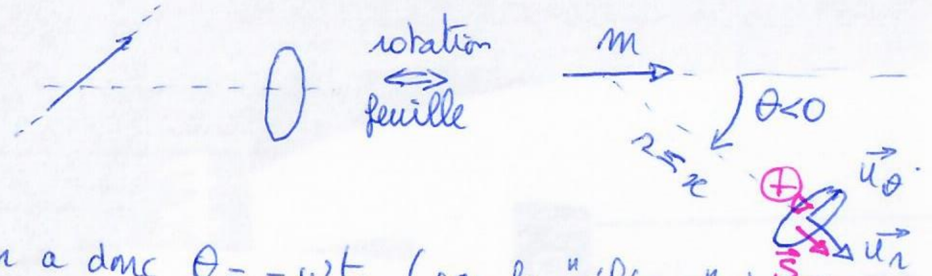
D'où $J\ddot{\theta} = -\dfrac{\ell^4B^2\dot{\theta}}{4R} - \dfrac{mg\ell}{2}\sin\theta$.

Avec $J = \frac{1}{3}mL^2$, il vient $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{3\ell^2B^2}{4mR}\dot{\theta} + \dfrac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0}$

2) Petites oscills $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$: $\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta = 0$, oscillations amorties non pseudopériodiques si $\Delta = b^2 - 4c > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3\ell^2B^2}{4mR} > \sqrt{\dfrac{6g}{\ell}} \Rightarrow \boxed{B \geq \left(\dfrac{32}{3}\dfrac{gm^2R^2}{\ell^5}\right)^{1/4}}$

Principe du générateur synchrone



On a donc $\theta = -\omega t$ (car la "référence" est $\vec{m_0}$ tournant ; dans le referentiel de $\vec{m}$, la spire tourne dans le sens ⊖)

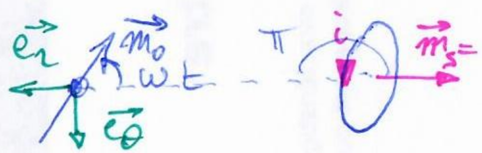
Donc au centre de la spire, $\vec{B} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3}(2\cos\omega t\, \vec{e_r} - \sin\omega t\, \vec{e_\theta})$

Avec l'orientat° choisie, $\phi = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} 2\cos\omega t \times \pi a^2 = \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2x^3}\cos\omega t$
$(S = \pi a^2)$

2) D'où $e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 a^2 m_0 \omega}{2x^3}\sin\omega t$, $\boxed{i = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 a^2 m_0 \omega}{2Rx^3}\sin\omega t}$

D'où $\boxed{P_{elec} = Ri^2 = \frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2 \omega^2}{4Rx^6}\sin^2\omega t}$

3) La spire est elle même un moment magnétique :



$\vec{m_s} = \pi a^2 i \vec{e_x}$ (⚠ orientation imposée par i)

⇒ $\vec{m_0}$ est à $\left|\begin{array}{l}\theta = \pi \\ r = x\end{array}\right.$ de la spire, donc subit le champ de la spire $\vec{B_s} = \frac{\mu_0 m_s}{4\pi x^3}(-2\underbrace{\vec{e_r}}_{= -\vec{e_x}}) = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi x^3}\vec{e_x}$

$\vec{m_0}$ subit 1 couple $\vec{\Gamma} = \vec{m_0} \wedge \vec{B_s}$

$= \frac{\mu_0 m_s}{2\pi x^3}\underbrace{\vec{m_0} \wedge \vec{e_x}}_{= -m_0 \sin\omega t\, \vec{e_z}}$

Soit $\boxed{\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2 \omega}{4Rx^6}\sin^2\omega t\, \vec{e_z}}$

4) On doit fournir 1 puissance méca

$P_{méca} = \Gamma\omega = \frac{\mu_0^2 a^4 m_0^2 \omega^2}{4Rx^6}\sin^2\omega t$

$P_{meca} = P_{elec}$ ⇒ on a converti de l'energie méca en energie elec.