Statique des fluides

A savoir et savoir faire

- Donner l'expression de la force surfacique de pression élémentaire.
- Donner l'expression de la résultante des actions de pressions sur une surface.
- Déterminer l'action de pression exercée sur une particule fluide.
- Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides.
- Déterminer le champ de pression dans un fluide incompressible.
- Déterminer le champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme.
- Présenter la poussée d'Archimède et son origine physique.
- Introduire la notion de facteur de Boltzmann dans le cas de l'atmosphère isotherme.

EC1 - Force subie par un barrage

On étudie le barrage qui retient l'eau d'un lac. On note p_0 la pression de l'air ambiant et ρ la masse volumique de l'eau. La surface du barrage en contact avec l'eau est un mur plan, rectangulaire vertical, de hauteur h et de largeur L.
1. Déterminer la résultante des forces de pression $\vec{F_1}$ exercée par l'eau sur le barrage.
2. Si il n'y avait pas d'eau, quelle serait la force $\overrightarrow{F_2}$ exercée par l'air sur la partie qui devrait être immergée du barrage ?
3. La résultante $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}$ représente l'effet net de l'eau sur le barrage. Calculer la norme de cette force ($h = 50.0$ m, $L = 100$ m).

EC2 - Force subie par une vitre hémicirculaire

La vitre d'un aquarium a la forme d'un demi-cylindre d'axe vertical, de hauteur h et de rayon R. L'eau affleure au sommet de la vitre. On note ρ la masse volumique constante de l'eau liquide, g le champ de pesanteur et p_0 la pression atmosphérique à la surface de l'eau.
1. Quel est le système de coordonnées adapté ?
2. Exprimer la pression au sein de l'eau et la pression au sein de l'air en un point de la surface.
3. Écrire l'élément de surface $\mathrm{d}S_M$ dans le système de coordonnées choisi précédemment.
4. En déduire la force de pression exercée sur l'élément de surface $\mathrm{d}S_M$. On n'oubliera pas de préciser le vecteur unitaire.
5. En déduire l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur la paroi à l'aide d'une intégrale double.
Remarque : Le calcul de l'intégrale précédente ne peut pas être fait directement à cause de la présence du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}(\theta)$ qui dépend de la position à la surface de l'aquarium.
6. Déterminer un plan de symétrie du problème. Tracer sur un schéma les forces $\mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(M)$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(M')$ qui s'exercent en deux points M et M' symétriques par rapport au plan de symétrique précédent. Quelle est la direction de la somme $\mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(M) + \mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(M')$? En déduire la direction de la résultante des forces de pression.
7. Projeter la résultante des forces de pression dans la direction déterminée précédemment, puis calculer l'intégrale. Faire l'application numérique pour une vitre de même taille que dans le cas précédent.

EC-3 Ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan

On se place dans l'océan, en considérant l'axe (Oz) descendant avec O situé à la surface de l'eau. On assimile l'océan à un fluide homogène et incompressible de masse volumique proche de celle de l'eau $\rho \simeq 1$ kg L^{-1}.
1. Établir l'expression du champ de pression $p(z)$ dans l'océan.
2. Exprimer l'augmentation de la pression dans l'océan pour une variation de profondeur de 10 m.
3. Calculer la pression dans les fonds océaniques (profondeur de l'ordre de 10 km).

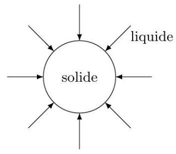
EC-4 Expérience de Torricelli

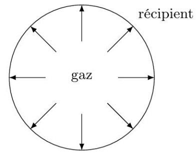
En 1647, Blaise Pascal reprit l'expérience de Torricelli : il remplit un tube de mercure qu'il retourne dans une cuve de mercure. Le mercure, métal liquide, descend dans le tube puis se stabilise. Il la réalise au Puy de Dôme à différentes altitudes. L'espace dans le tube au-dessus du liquide sera assimilé à du vide (rigoureusement, il s'agit de la vapeur de mercure à l'équilibre avec son liquide, à la pression de vapeur saturante).
1. Faire un schéma de l'expérience.
2. Relier la pression atmosphérique à la hauteur du mercure dans le tube, le champ de pesanteur et la masse volumique du mercure ($\rho_{Hg} = 13.546$ kg L^{-1}).
3. Lors de la réalisation de l'expérience, la mesure de la hauteur du mercure dans le tube a été faite en bas du Puy de Dôme et en haut. Sachant que le mercure est descendu de 9 cm, déterminer la différence de pression atmosphérique entre le bas et le haut du Puy de Dôme.

I. Pression dans un fluide

1. Champ scalaire et pression

Constat expérimental : Tout fluide exerce sur toute surface avec laquelle il est en contact une force pressante $\vec{F}_p$ perpendiculaire à cette surface.
Localement s'exerce sur une surface élémentaire dS une force élémentaire qui peut s'écrire





$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_p = p(M)\mathrm{d}S\overrightarrow{n} \text{ avec } P(M) = \frac{dF_p(M)}{dS}}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire orthogonal à la surface et dirigée du fluide vers le solide.
$P(M)$ est la pression en M (en Pa ou Nm^{-2}), homogène à une force par unité de surface = force surfacique.
$\Rightarrow$ La pression est un **champ scalaire** = fonction $p(M,t)$ définie en tout point M à chaque instant , soit ici une fonction réelle de quatre variables

2. Calcul de la résultante des forces de pression

Par intégration, la résultante des actions de pression s'écrit

$$\vec{F}_p = \iint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{d}F}(M) = \iint_{M\in\mathcal{S}} p(M)\overrightarrow{\mathrm{d}}_M$$

Le calcul de la résultante des actions de pression dans un cas quelconque peut être fastidieux, il est primordial de s'intéresser aux symétries et invariances du problème afin de réduire l'ampleur du calcul de la résultante.

Méthode de calcul de $\vec{F}_p$

① Déterminer le champ de pression $p(M)$, dans le fluide, en tout point M de la surface.
② Choisir le système de coordonnées adapté au problème et exprimer l'élément de surface $\mathrm{d}S_M$ sur la paroi.
③ En déduire la force de pression élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(M) = p(M)\mathrm{d}S_M\vec{n}$, avec $\overrightarrow{n_M}$ le vecteur unitaire dirigé du solide vers le fluide. Attention au sens de la force par rapport au sens du vecteur unitaire (vérifier le sens physique).
④ Étudier les symétries du problème et en déduire, à l'aide d'un schéma, la direction de la résultante des forces de pression $\vec{F}_p = F_p\vec{u}$. S'aider d'un schéma pour déterminer la direction à partir des symétries.
⑤ Exprimer la projection de la résultante des forces de pression sur la direction déterminée par symétrie, en déduire le vecteur $\overrightarrow{F_p}$.

$\rightsquigarrow$ EC1, EC2

3. Équivalent volumique des actions de pression

La résultante sur un volume $\mathrm{d}\tau$ est décrite par une force volumique, exprimée en Nm^{-3} :

$$\vec{f}_p = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}F}_p}{\mathrm{d}\tau} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)$$

Démonstration : Rappel : opérateur gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) = \dfrac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

II. Statique des fluides dans un champ de pesanteur uniforme

La statique des fluides se limite à l'étude d'un fluide macroscopiquement au repos dans un référentiel galiléen.

1. Relation fondamentale de la statique des fluides

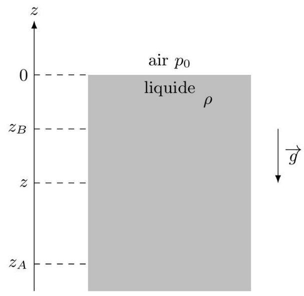
La deuxième loi de Newton donne, pour une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ et masse volumique ρ soumise à la pression exercée par le fluide et à son poids.

$$m\vec{a} = \rho\mathrm{d}\tau\vec{a} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)\mathrm{d}\tau + \rho\mathrm{d}\tau\vec{g}$$

qui devient pour une particule au repos

$$\boxed{\rho\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)}$$

2. Champ de pression dans un fluide incompressible



Avec (Oz) orienté **vers le haut**,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) = \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = -\rho g\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \mathrm{d}p = -\rho g\ \mathrm{d}z$$

D'où par intégration

$$p\left(z_B\right) - p\left(z_A\right) = -\rho g\left(z_B - z_A\right).$$

A la surface libre (en contact avec l'atmosphère) $p = p_0$, d'où

$$\boxed{\begin{cases} p(z) = p_0 - \rho g z \text{ (axe vers le haut)} \\ p(z) = p_0 + \rho g z \text{ (axe vers le bas)} \end{cases} \quad \text{Bon sens : la pression doit diminuer en montant !}}$$

$\rightsquigarrow$ EC3

Conséquence : dans un **fluide homogène**, deux points à la même cote ont même pression.

$\rightsquigarrow$ EC4

3. Modèle de l'atmosphère isotherme

L'air est supposé gaz parfait, la température est supposée uniforme T_0.
- En déduire l'expression de $\rho(z)$ en fonction de $P(z)$.
- Intégrer la relation fondamentale de la statique pour exprimer $P(z)$, on prendra $P(0) = P_0$.

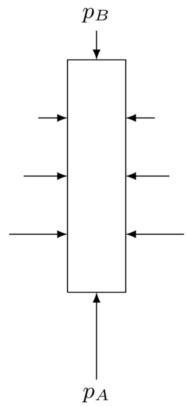
On a donc $\rho(z) = \dfrac{p_0 M}{RT_0}\exp\left(-\dfrac{Mg}{RT_0}z\right) = \rho_0\exp\left(-\dfrac{e_p(z)}{RT_0}\right)$ avec $e_p(z) = \dfrac{mgz}{N}$ énergie potentielle microscopique d'une particule.

Généralisation : Facteur de Boltzmann

Soit un système thermodynamique à l'équilibre à la température T, dans lequel les énergies prises par les particules peuvent avoir des valeurs différentes E_i. Le nombre moyen N_i de particules ayant l'énergie E_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann

$$N\left(E_i\right) = N_i \propto \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

4. Poussée d'Archimède



Considérons un cylindre vertical, immergé dans un fluide incompressible. Les composantes latérales des forces de pression se compensent. De plus la pression s'écrit $p(z) = p_0 - \rho g z$, la résultante des actions de pression s'écrit

$$\vec{F} = p_A S\overrightarrow{u_z} - p_B S\overrightarrow{u_z} = (p_A - p_B)\, S\overrightarrow{u_z};$$

avec p_A la pression exercée sur la face inférieure du cylindre et p_B celle exercée sur la face supérieure. La résultante des forces subies par ce solide peut se réécrire

$$\vec{F} = \rho_f\,(z_B - z_A)\, Sg\overrightarrow{u_z} = \rho_f V g\overrightarrow{u_z};$$

avec ρ_f la masse volumique du fluide et V le volume de fluide déplacé. Ce résultat se généralise :

Poussée d'Archimède

La résultante des actions de pression exercées par un fluide sur un solide qui y est immergé est égale à l'opposé du poids de la portion de fluide déplacé par ce solide.