

Problème 1 : Etude de deux installations industrielles.

A. Etude d'une turbine à gaz parfait.

Ordre de grandeur.

1. La puissance mécanique utile fournie par la turbine est $P_u=1,0\text{MW}$. Elle est produite à partir de la puissance thermique produite par la combustion du carburant.

Le rendement $r=0,5$ est défini par la relation habituelle $r = \frac{\text{utile}}{\text{fourni}} = \frac{P_u}{P_{\text{comb}}}$

Pour un fonctionnement de la turbine pendant une durée Δt de une heure, l'énergie à fournir par combustion est donc $E_{\text{comb}} = P_{\text{comb}} \Delta t = \frac{P_u}{r} \Delta t$

La combustion du fuel libère une chaleur massique q_{fuel} , l'énergie libérée pendant une heure par cette combustion est alors exprimée par $E_{\text{comb}} = q_{\text{fuel}} m_{\text{fuel}}$

On en déduit que la masse de fuel consommée par la turbine en une heure est $m_{\text{fuel}} = \frac{P_u \Delta t}{r q_{\text{fuel}}} = 180\text{kg}$

La masse de dioxyde de carbone rejeté est donnée d'après l'énoncé par $m_{\text{CO}_2} = 3.m_{\text{fuel}} = 540\text{kg}$

Cycle de Brayton.

2. Pour qu'une transformation soit considérée comme adiabatique, il faut qu'aucun transfert thermique ne soit échangé avec l'environnement par le système étudié. Cette hypothèse est raisonnable si la transformation étudiée est suffisamment rapide pour que les échanges n'est le temps d'être réalisés.

On étudie donc une transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait, on sait que le système vérifie alors les lois de Laplace $p_e v_e^\gamma = p_s v_s^\gamma$

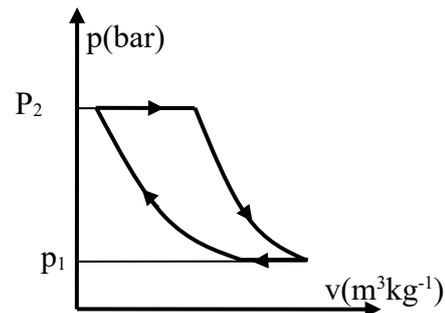
- D'après le 1^{er} principe $du = \delta w + \delta q$.
- la chaleur reçue est nulle car la transformation est adiabatique.
- Le travail reçu s'exprime sous la forme $\delta w = -p_{\text{ext}} dv = -p dv$ car la transformation est réversible.
- La variation d'énergie interne massique s'écrit $du = \frac{R}{(\gamma-1)M} dT$.
- La loi des gaz parfait donne alors $pv = \frac{R}{M} T$ d'où $\frac{R}{M} dT = d(pv)$

On obtient finalement $\frac{1}{\gamma-1} d(pv) + p dv = 0$ d'où $\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$ d'où $d(\ln(pv^\gamma)) = 0$

On conclut bien que la quantité pv^γ est conservée lors de la transformation.

3. Dans le cycle de Brayton, on trouve deux types de transformations :

- Les compression et détente adiabatiques réversibles pour lesquelles p et v sont liés par la loi de Laplace, les représentations suivront la courbe $p = \frac{\text{cste}}{v^\gamma}$
- La combustion et le refroidissement dans l'atmosphère décrits comme isobares et qui seront représentées par des droites horizontales.
- Le cycle obtenu est parcouru dans le sens horaire significatif du caractère moteur de la machine étudiée.



Rendement théorique.

4. La capacité thermique massique de l'air s'exprime $c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma-1)M} = 1,08\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

5. La transformation 1→2 est adiabatique réversible et vérifie la loi de Laplace ce qui donne

$$p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \text{ et on obtient alors } T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \text{ de même } T_4 = T_3 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

On définit alors x tel que $T_2 = x T_1$, alors $x = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$ et $T_4 = \frac{T_3}{x}$

6. Sur l'ensemble du cycle, le premier principe donne $0 = w + q_{23} + q_{41}$ puisque les transformations 1→2 et 3→4 sont adiabatiques.

Pour les isobares, le premier principe donne $q_{23} = h_3 - h_2 = c_p(T_3 - T_2)$ et $q_{41} = h_1 - h_4 = c_p(T_1 - T_4)$

Finalement $w = c_p(T_2 + T_4 - T_1 - T_3) = c_p\left((x-1)T_1 + \left(\frac{1}{x}-1\right)T_3\right)$

7. Lorsque le travail récupérable est maximal, sa dérivée x est nulle $\frac{d(-w)}{dx} = c_p\left(\frac{1}{x^2}T_3 - T_1\right)$

Le maximum est obtenu lorsque $\left(T_1 - \frac{1}{x_m^2}T_3\right) = 0$ ce qui donne $x_m = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$ et $(-w_m) = c_p(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3})$

Les applications numériques donnent $x_m = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} = 1,82$ et $(-w_m) = 2,08 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$

8. Les applications numériques donnent $T_2 = T_4 = \sqrt{T_1T_3} = 523 \text{ K}$ et $p_2 = p_1 x_m^{\gamma-1} = 9,53 \text{ bar}$

9. Le transfert thermique s'exprime $(q_{23})_m = c_p(T_3 - \sqrt{T_1T_3}) = 4,6 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$

Le rendement est défini par $r_m = \frac{\text{utile}}{\text{fourni}} = \frac{-w_m}{(q_{23})_m} = \frac{T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3}}{T_3 - \sqrt{T_1T_3}} = 0,45$

10. Une analyse dimensionnelle permet de retrouver $P_u = D_m(-w_m)$

Si le travail massique utile diminue, il faut augmenter le débit massique dans la turbine et donc augmenter sa vitesse de rotation pour maintenir la puissance utile constante.

11. Le rendement r_m est obtenu pour x_m autour de 1,8, on observe effectivement qu'il n'est pas maximal puisque le rendement est strictement croissant. Cependant deux arguments s'opposent à l'idée d'augmenter le rendement au-dessus de la valeur r_m .

- Il faudrait augmenter le débit massique d'air dans la turbine et donc accélérer la rotation pour maintenir la puissance utile ce qui peut entraîner des dégradations mécaniques.
- Il faudrait augmenter la pression p_2 ce qui augmente les contraintes mécaniques sur le système. La température T_2 augmenterait également et pourrait dépasser la valeur limite de 700°C.

Introduction d'un échangeur.

12. Puisque l'échangeur est isobare et adiabatique, le premier principe affirme que l'enthalpie du système est constante. Le bilan d'enthalpie lorsqu'une masse dm circule dans le système s'exprime

$$\Delta H = dm(h_2' - h_2) + dm(h_4' - h_4) = dm c_p (T_2' - T_2) + (T_4' - T_4)$$

C'est la même masse qui passe dans l'échangeur dans les deux circuits car le fonctionnement est stationnaire.

On en déduit bien $(T_2' - T_2) + (T_4' - T_4) = 0$.

De plus, les échanges thermiques pour le fluide dans le système sont exprimés par $q_{22'} = h_2' - h_2$ et $q_{44'} = h_4' - h_4$

Et on obtient bien $q_{22'} + q_{44'} = 0$

13. La transformation dans l'échangeur est donc adiabatique et réversible dont l'entropie est constante.

$$\Delta S = dm(s_2' - s_2) + dm(s_4' - s_4) = dm \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\ln\left(\frac{T_2'}{T_2}\right) + \ln\left(\frac{T_4'}{T_4}\right) \right]$$

On obtient donc bien $T_2' T_4' = T_2 T_4$

14. Le système d'équations établis en q12 et q13 a pour solution :

$(T_2' = T_2)$ et $(T_4' = T_4)$ où il ne se passe rien dans l'échangeur...

$(T_2' = T_4)$ et $(T_4' = T_2)$ où le gaz et à la même température en tout point des deux circuits le traversant ce qui correspond bien à des échange thermiques réversibles... On retient donc cette solution.

15. On reprend les éléments présentés en q6 et q9.

1^{er} principe sur un cycle $0 = w' + q_{22'} + q_{23} + q_{44'} + q_{41} = w' + q_{23} + q_{41}$ d'où le rendement $r' = \frac{-w'}{q_{23}} = 1 + \frac{q_{41}}{q_{23}}$

Avec les relations $q_{41} = h_1 - h_4' = c_p(T_1 - T_4')$ et $q_{23} = h_3 - h_2' = c_p(T_3 - T_2')$

on obtient $w' = c_p(T_2' - T_3 + T_4' - T_1)$ $r' = 1 - \frac{T_4' - T_1}{T_3 - T_2'}$ puis $w' = c_p(T_4 - T_3 + T_2 - T_1)$ $r' = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}$

On constate qu'on a le même travail massique utile qu'avant mais que le rendement est modifié.

16. On reprend les calculs $T_2 = x' T_1$; $T_4 = \frac{T_3}{x'}$ avec $x' = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

ce qui donne $w = c_p \left[(x'-1)T_1 + \left(\frac{1}{x'} - 1\right)T_3 \right]$ et $r' = 1 - \frac{T_1}{T_3} \frac{x'-1}{1 - \frac{1}{x'}}$

17. La seconde courbe montre que le travail récupérable (-w') est toujours maximal pour $x_m=1,82$, mais que le rendement dans ce cas n'est pas optimisé. La première courbe montre maintenant que le rendement présente lui aussi un maximum pour une valeur de $x_m \approx 1,24$ ce qui est plus intéressant que la valeur infinie du système sans échangeur.

On a donc le choix entre le meilleur rendement ou le meilleur travail massique utile. A puissance égale fournie par la turbine, on aura donc le choix entre une consommation réduite en carburant mais avec un débit d'air plus important lorsqu'on privilégie le rendement et une vitesse de rotation minimale de la turbine minimisant le débit d'air mais avec une consommation de carburant plus importante.

18. On estime les rendements avec la lecture sur la courbe $r_{\max}(x'=1,24) \approx 0,52$ et $r(x'=1,82) = 0,45$.

On rappelle que la consommation trouvée en q_1 est $m_{\text{fuel}} = \frac{P_u \Delta t}{r q_{\text{fuel}}}$

Les masses consommées dans les deux configurations sont alors $m_1 = \frac{P_u \Delta t}{r q_{\text{fuel}}}$ et $m_{\text{opti}} = \frac{P_u \Delta t}{r_{\max} q_{\text{fuel}}}$

La diminution relative de consommation est alors $\frac{m_1 - m_{\text{opti}}}{m_1} = \frac{r}{r_{\max}} = -14\%$

B. Etude d'une machine à vapeur d'eau.

Tracé du cycle et résumé des états du système.

19. On considère le second principe de la thermodynamique qui s'écrit pour une transformation infinitésimale sous la forme $dS = \delta S^{\text{ech}} + \delta S^{\text{créée}}$

La transformation est dite réversible donc $\delta S^{\text{créée}} = 0$ et elle est dite adiabatique donc $\delta S^{\text{ech}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{thermostat}}} = 0$

Une transformation adiabatique réversible est bien isentropique, c'est-à-dire que l'entropie est constante tout au long du chemin puisqu'à chaque étape $dS = 0$.

20. Dans le modèle de la phase condensée indilatable et incompressible, le volume massique de l'eau liquide est invariant, indépendant de la température (indilatable) et de la pression (incompressible).

La relation fournie $c_{\text{eau}} dT = T ds$ entraîne bien qu'une transformation isentropique pour laquelle $ds = 0$ est également isotherme $dT = 0$.

21. (Voir diagramme en fin de corrigé).

22. Le tableau à compléter est le suivant

ETATS	Pression	Température	Enthalpie massique	Phase(s) observée(s)
	Bar	°C	kJ.kg ⁻¹	
A	1,0	25	100	Liquide
B	40	25	~100	Liquide
C	40	250	1080	Liquide saturant
D	40	250	2800	Vapeur saturante
E	40	375	3150	Vapeur sèche
F	1	100	2420	Eq Liq-Vapeur

Etude des transferts énergétiques.

23. On applique le premier principe industriel $h_E - h_B = q_{BE}$. L'A.N donne $q_{BE} = 3050 \text{ kJ.kg}^{-1}$

24. On applique la même méthode $h_A - h_F = q_{FA}$ l'application numérique donne $q_{FA} = -2320 \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

25. On applique encore le premier principe industriel $h_F - h_E = w_{EF}$ car dans la turbine la détente est adiabatique et permet de récupérer un travail. L'application numérique donne $w_{EF} = -730 \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

26. On applique alors le premier principe industriel pour obtenir $w_{AB} = (h_B - h_A) \approx 0$ par lecture graphique. Ce travail massique est donc bien négligeable dans notre étude.

27. Le rendement de la machine thermique vue comme un moteur est défini par $r_1 = \frac{\text{utile}}{\text{fourni}} = \frac{-w_{EF}}{q_{BE}}$

puisque'on récupère le travail $-w_{EF}$ dans la turbine et qu'on fournit le transfert thermique (positif) q_{BE} .

On obtient alors $r_1 = \frac{h_E - h_F}{h_E - h_B} = 0,31$.

28. L'alternateur présente un rendement de 0,9, le rendement électrique est $r_{1,elec} = \frac{-0,9 \cdot w_{EF}}{q_{BE}} = 0,28$

29. Le titre massique en vapeur en F est défini par $x_{V,F} = \frac{m_{V,F}}{m}$

Puisque l'enthalpie est une grandeur extensive : $\begin{cases} H = H_V + H_L \\ m = m_V + m_L \end{cases}$ soit $\begin{cases} h_F \cdot m = h_V \cdot m_V + h_L \cdot m_L \\ m = m_V + m_L \end{cases}$

On en conclut que $m(h_F - h_L) = m_V(h_V - h_L)$ et que $x_{V,F} = \frac{h_F - h_L}{h_V - h_L}$

On lit sur le graphique $h_L \approx 400 \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ $h_V \approx 2680 \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, on en déduit $x_{V,F} = 0,89$

La lecture graphique donne un résultat légèrement inférieur à 0,9 ce qui semble cohérent avec le calcul effectué.

30. Lors de la transformation B→E, le fluide reçoit le transfert thermique $q_{BE} = h_E - h_B$ avec une source

chaude de température T_E . On en déduit que $s_{BE}^{ech} = \frac{h_E - h_B}{T_E}$.

31. De même on obtient $s_{FA}^{ech} = \frac{h_A - h_F}{T_A}$

32. Sur un cycle, la variation d'entropie massique est nulle puisque c'est une grandeur d'état.

33. Les entropies échangées sont nulles sur la transformation A→B et E→F car elles sont adiabatiques.

Le second principe permet donc de conclure que : $s_A - s_A = 0 + s_{BE}^{ech} + 0 + s_{FA}^{ech} + s^{cr}$

On obtient donc $s^{cr} = \frac{h_B - h_E}{T_E} + \frac{h_F - h_A}{T_A}$ L'application numérique donne $s^{cr} = 3,08 \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

On obtient bien une entropie créée positive ce qui indique que le système évolue de manière irréversible. La cause notable étant les échanges thermiques entre le fluide et la source chaude avec $T_{\text{fluide}} < T_{\text{chaude}}$ ainsi que les échanges thermiques entre le fluide et la source froide avec $T_{\text{fluide}} > T_{\text{froide}}$.

34. Si un kilogramme de fluide faisant un cycle dans la machine fournit un travail massique $-w_{EF}$ à la turbine alors un débit de D kilogramme par seconde fournit une puissance mécanique $-Dw_{EF}$.

Avec le rendement du transformateur électrique $P_{elec} = -0,9 \cdot Dw_{EF}$ l'application numérique donne $P_{elec} = 3,1 \text{MW}$ qui donne le bon ordre de grandeur mais sous évalue de 16% la valeur réelle.

Cogénération dans le système.

35. En appliquant la même méthode que précédemment, le transfert thermique massique vers la source froide s'exprime $q_{froid} = h_A - h_F$.

La puissance thermique totale récupérable est alors de $P_{th} = -Dq_{froid} = -D(h_A - h_F)$

L'énergie thermique récupérable est alors $E_{th} = -D(h_A - h_F) \Delta t$. L'A.N donne $E_{th} = 96 \text{GWh}$

On ne récupère dans l'exploitation du réseau urbain de chauffage que 72GWh, il y a donc un rendement à nouveau faible ici puisque l'énergie récupérée semble être de seulement 3/4 de l'énergie maximale récupérable. Le rendement total de l'installation sera tout de même amélioré puisqu'on récupérera le travail électrique et le transfert thermique exploité au lieu du seul travail électrique.

Problème 2 : Effet du champ magnétique sur un aimant.

A. Etude du champ magnétique terrestre à l'aide d'une boussole.

Mouvement de l'aiguille de la boussole.

- Le BAM sur l'aiguille aimantée est le suivant :
 - Action de la liaison pivot parfaite de moment nul par rapport à Δ .
 - Action de gravité qui sera de moment nulle puisqu'elle est équilibrée.
 - **Action de Laplace** exerçant sur l'aiguille le couple $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}_T$ ce qui donne un moment par rapport à l'axe de rotation Δ $\Gamma_L = -mB_H \sin \alpha$
- On écrit la condition d'équilibre de l'aiguille par rapport à la rotation autour de Δ : $\sum \Gamma = \Gamma_L = 0$.

On en déduit que les positions d'équilibre sont données par $\sin \alpha = 0$
 La première position d'équilibre est donc $\alpha=0$. On étudie sa stabilité en envisageant d'écarter légèrement l'aiguille de cette position ce qui donne un moment $\delta\Gamma = -mB_H \sin \delta\alpha \xrightarrow{DL} -mB_H \delta\alpha < 0$ qui ramène l'aiguille à la position initiale.

La première position d'équilibre est donc $\alpha=\pi$. On étudie sa stabilité en envisageant d'écarter légèrement l'aiguille de cette position ce qui donne un moment $\delta\Gamma = -mB_H \sin(\pi + \delta\alpha) \xrightarrow{DL} mB_H \delta\alpha > 0$ qui écarte l'aiguille à la position initiale.

La position d'équilibre stable est donc bien ($\alpha=0$), la boussole indique bien le nord magnétique local.

- On applique le théorème du moment cinétique à l'aiguille ce qui donne : $I\ddot{\alpha} = \sum \Gamma$
 ce qui donne bien ici $I\ddot{\alpha} + mB_H \sin \alpha = 0$ ce qui donne l'équation du pendule.

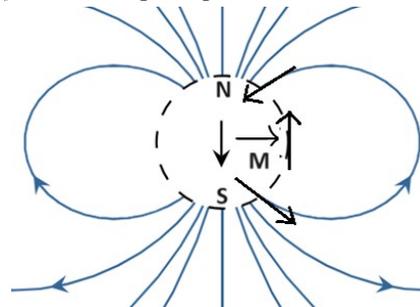
- Aux petits angles, l'équation devient $I\ddot{\alpha} + mB_H \alpha = 0$

On l'écrit sous la forme canonique pour l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mB_H}{I}}$ et la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB_H}}$

Application à l'étude du moment magnétique terrestre.

- La direction verticale locale vers le haut est donnée par le vecteur \vec{e}_r de la base sphérique.
- La direction locale vers le nord est donnée par le vecteur $-\vec{e}_\theta$ de la base sphérique.
- Les constructions sont données ci contre.
 - Dans l'hémisphère nord, le champ magnétique pointe vers le nord et vers le bas.
 - Dans l'hémisphère sud, le champ magnétique pointe vers le nord et vers le haut.
 - Sur l'équateur, le champ magnétique pointe vers le nord sans composante verticale.



- On exploite la relation obtenue à la q4 pour exprimer la norme du champ magnétique à l'équateur qui s'identifie avec sa composante horizontale $B_H = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{I}{m} = 3,00.10^{-5} T$

- Le Champ magnétique sur l'équateur est obtenu en considérant que \vec{OP} et \vec{M} sont perpendiculaires ce

qui donne $\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}}{\|\vec{OP}\|^3}$ en notant que $\|\vec{OP}\| = R_T$, on obtient bien $M = \frac{4\pi R_T^3}{\mu_0} \|\vec{B}(P)\|$

L'application numérique donne $M = 7,7.10^{22} Am^2$

B. Etude d'un moteur synchrone.

Etude du mouvement du rotor.

- Le couple de Laplace par rapport à Δ est toujours $\Gamma_L = (\vec{M} \wedge \vec{B}_T) \cdot \vec{e}_\Delta = mB_o \sin((\Omega - \omega)t + \alpha)$

- La moyenne dans le temps de ce moment est donc $\langle \Gamma_L \rangle = mB_o \langle \sin((\Omega - \omega)t + \alpha) \rangle$

La moyenne de la fonction sinus étant nulle, on en déduit que $\langle \Gamma_L \rangle = 0$ si $\Omega \neq \omega$

L'action de Laplace ne sera donc motrice que si $\Omega = \omega$, d'où le nom de moteur synchrone donné à ce système, le moment exercé sur le rotor par le champ est alors $\langle \Gamma_L \rangle = mB_o \sin \alpha$.

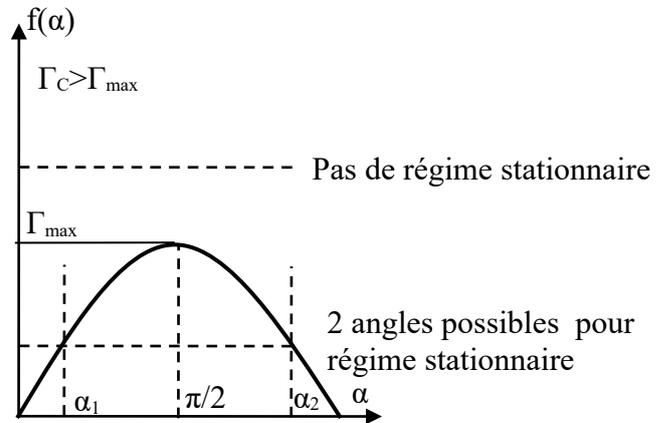
11. Le théorème du moment cinétique sur le rotor donne $J \frac{d\omega}{dt} = \sum \Gamma$ ici $\frac{d\omega}{dt} = 0$ et on aboutit bien à la relation proposée $mB_o \sin \alpha - \Gamma_c = 0$.

12. On présente ci-contre la construction graphique demandée :

Le moment moteur de Laplace $mB_o \sin \alpha$ est maximal pour $\alpha = \pi/2$ et s'exprime alors $\Gamma_{\max} = mB_o$

Si la charge exerce un couple résistant de norme supérieure à cette valeur, l'action de Laplace ne pourra pas la compenser et on ne pourra pas obtenir de régime stationnaire de fonctionnement du moteur.

13. La construction montre bien que deux angles sont possibles pour un régime stationnaire de fonctionnement du moteur.



14. Si l'angle α diminue c'est que la vitesse de rotation ω a légèrement augmenté, et cela entraîne à partir de l'angle α_1 une diminution du couple moteur, le moment total subi par le rotor est alors négatif.

Le théorème du moment cinétique pour le rotor montre alors que la vitesse de rotation sera diminuée, revenant alors à la vitesse de rotation du fonctionnement stationnaire.

Après perturbation du fonctionnement, le moteur retourne à ce point de fonctionnement, on est donc dans le cas d'un **point de fonctionnement stable pour l'angle α_1** .

15. De même pour α_2 , si α diminue c'est que ω augmente, et cela entraîne un moment total subi par le rotor positif, ce qui entraîne une augmentation de la vitesse de rotation qui s'éloigne encore de la vitesse du fonctionnement stationnaire.

On aboutit donc à un **point de fonctionnement instable pour l'angle α_2** .

Etude du stator.

16. Le champ magnétique généré par la bobine dans le modèle du solénoïde infini est $\vec{B} = \mu_o \frac{N}{L} I \vec{u}$

Le schéma précise la direction et le sens de \vec{u} en accord avec la règle d'Ampère.

17. Soit P le plan perpendiculaire à l'axe (Ox) passant par O. C'est un plan de symétrie de la distribution de courant, on sait dans ce cas que le champ magnétique est normal à ce plan et qu'il est orienté selon \vec{e}_x .

Avec les exemples vus en cours, on sait que le champ magnétique est proportionnel à l'intensité du courant, puisque l'intensité est sinusoïdale, le champ magnétique produit sera sinusoïdal synchrone de l'intensité.

18. On souhaite produire un champ magnétique tournant de norme constante mais donc la direction et le sens tourne à la vitesse angulaire Ω .

En choisissant i_1 et i_2 tels que donnés dans l'énoncé, on produira un champ magnétique total donné par :

$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = B_o (\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \sin(\Omega t) \vec{e}_y) = B_o \vec{e}_{\Omega}$, ce qui permet bien de produire le champ magnétique tournant statorique.

19. Par définition l'impédance complexe lie la tension et l'intensité complexe associées à un dipôle en convention récepteur $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$

Ici, on observe que les deux circuits sont en parallèle $\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$

L'énoncé donne : $i_1(t) = I_o \cos(\Omega t)$ donc $\underline{I}_1(t) = I_o \exp(j\Omega t)$

et $i_2(t) = I_o \sin(\Omega t)$ donc $\underline{I}_2(t) = I_o \exp\left(j\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -j \underline{I}_1(t)$

On obtient donc $\underline{Z}_1 = -j \underline{Z}_2$ et $\underline{Z}_2 = j \underline{Z}_1$

20. Pour le circuit 1, l'association série aboutit à $\underline{Z}_1 = R_o + R + jL\Omega + \frac{1}{jC\Omega}$

Pour le circuit 2, l'association en série aboutit à $\underline{Z}_2 = R_o + R + jL\Omega$

21. D'après la relation écrite en q19. On sait que $|\underline{Z}_2| = |\underline{Z}_1|$

On en déduit que $\sqrt{(R + R_o)^2 + (L\Omega)^2} = \sqrt{(R + R_o)^2 + \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)^2}$

Ce qui aboutit à l'équation $(L\Omega)^2 = \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)^2$ ce qui aboutit à :

➤ Soit $(L\Omega) = \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)$ et $\frac{1}{C} = 0$ ce qui n'est pas une solution très pertinente.

➤ soit $(L\Omega) = -\left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)$ et on obtient bien alors une capacité idéale $C = \frac{1}{2L\Omega^2}$

22. Les arguments de ces impédance sont liées par $\arg(Z_2) = \frac{\pi}{2} + \arg(Z_1)$

Les deux impédances présentent des parties réelles positives donc $\arg(Z_2) = \arctan\left(\frac{L\Omega}{R + R_o}\right)$

et $\arg(Z_1) = \arctan\left(\frac{L\Omega - \frac{1}{C\Omega}}{R + R_o}\right) = \arctan\left(\frac{-L\Omega}{R + R_o}\right)$ (en tenant compte du résultat de la q21)

On obtient donc $\arctan\left(\frac{L\Omega}{R + R_o}\right) = \frac{\pi}{4}$, on en déduit $\left(\frac{L\Omega}{R + R_o}\right) = 1$ et la résistance à utiliser $R_o = L\Omega - R$