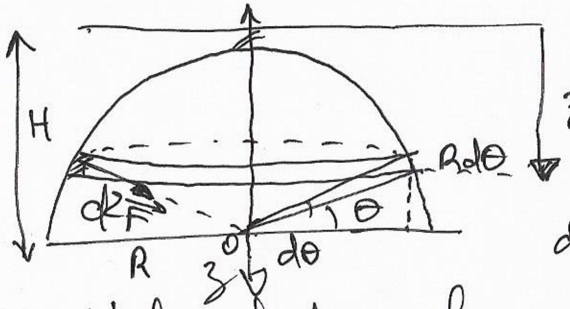
Fonte d'un glaçon

Le fond du verre "supporte" la masse de la colonne d'air et d'eau au dessus d'elle, indépendante de l'état physique de l'eau $\Rightarrow P_{A\,\text{avant}} = P_{A\,\text{après}} \Leftrightarrow P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g h'$

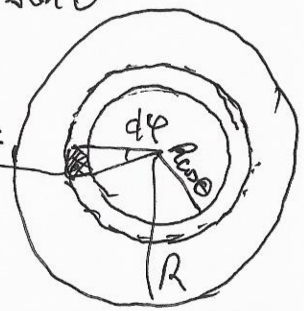
$\Rightarrow h = h'$, pas besoin de vider le verre.

Hôtel sous marin



$z = H - R\sin\theta$

vue de dessus :



1) L'élément de surface vaut d^2S

$d^2S = R\cos\theta\, d\varphi \times R\, d\theta$

Il subit $d^2\vec{F}$, orientée vers le centre de la sphère.

Par symétrie, la force résultante est selon Oz.

$d^2F_z = d^2F \sin\theta = P(z)\, R^2 \cos\theta\, d\theta\, d\varphi \sin\theta$

avec $P(z) = P_0 + \rho g z = P_0 + \rho g (H - R\sin\theta)$

Il faut intégrer $\rightarrow \theta$ varie entre 0 et $\pi/2$

$\rightarrow \varphi$ " " 0 et 2π

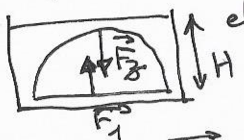
Finalement :

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left[P_0 + \rho g (H - R\sin\theta)\right] R^2 \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \left[(P_0 + \rho g H) \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}}_{1/2} - \rho R g \underbrace{\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}}_{1/3} \right]$$

$$= \pi R^2 \left[P_0 + \rho g \left(H - \frac{2}{3}R\right)\right]$$

2) Supposons qu'on décolle un peu l'hémisphère pour la pesée :



elle subit $-\vec{F_z}$ cherchée

$-\vec{F_1}$ force de pression sous l'hémisphère

On $\vec{F_1} + \vec{F_z} = \vec{\Pi}$ (poussée d'Archimède)

= "résultante des forces de pression".

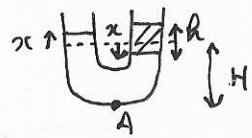
$= -\rho V \vec{g}$

avec $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ volume de l'hémisphère.

Donc $F_z = F_1 - \rho V g = \underbrace{\pi R^2 (P_0 + \rho g H)}_{F_1} - \frac{2}{3}\pi R^3 g$

$= \pi R^2 \left[P_0 + \rho g \left(H - \frac{2}{3}R\right)\right]$ (ouf !)

Tube en U



$P_A = \underbrace{P_0 + \rho_e g (H + x)}_{\text{à gauche}} = \underbrace{P_0 + \rho_e g (H - x) + \rho_h g h}_{\text{à droite}}$.

(on a $h = \frac{v_h}{S} = 2$ cm) (Si l'eau baisse de x à droite, elle monte de x à gauche (V_{eau} = cste !))

On en tire $\boxed{x = \frac{\rho_h}{\rho_e}\frac{h}{2} = 0{,}6 \text{ cm}}$

Pression sur l'Everest

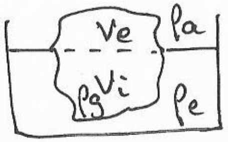
1) $T(z) = T_0 - az$, avec $\begin{cases} T_0 = 20°C \\ a = 6{,}78\ 10^{-3}\ °C\,m^{-1} \end{cases}$

2) On a $pV = nRT \Rightarrow \rho = \frac{Mn}{V} = \frac{PM}{RT}$. On remplace

dans $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PM}{RT}g \Rightarrow \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\int_0^z \frac{Mg}{R(T_0 - az)} dz$.

$\Rightarrow \ln\frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{aR} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right) \Rightarrow \boxed{P = P_0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}}}$

Iceberg



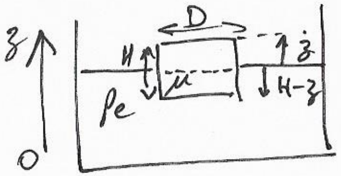
1) $\vec{\Pi} = (\rho_a V_e + \rho_e V_i) g \vec{z}$

$\vec{P} = -\rho_g (V_e + V_i) g \vec{z} = -\rho_g g V \vec{z}$

2) A l'équilibre $\Pi = P$ en norme : $\rho_a V_e + \rho_e (V - V_e) = \rho_g V$

d'où $\frac{V_e}{V} = \frac{\rho_g - \rho_e}{\rho_a - \rho_g} \simeq 0,10$, 90% de la glace est immergée

Oscillations d'un flotteur



1) $P = \Pi$ à l'équilibre, soit

$\mu \pi R^2 H g = \rho_e \pi R^2 g (H - z_{eq}) \Rightarrow \boxed{z_{eq} = H\left(1 - \frac{\mu}{\rho_e}\right)}$

2) PFD pour le flotteur selon Oz : $m\ddot{z} = \Pi - P$

$\mu \pi R^2 H \ddot{z} = \rho_e \pi R^2 (H - z) g - \mu \pi R^2 H g$

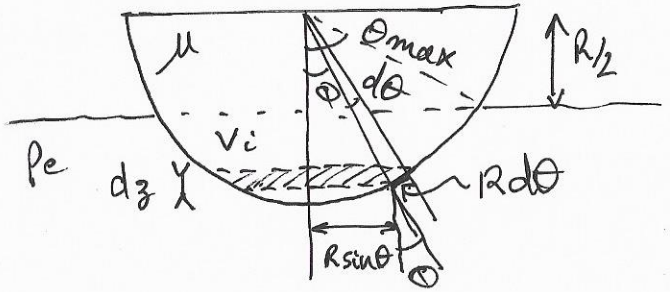
$\Leftrightarrow \ddot{z} + \underbrace{\frac{\rho_e}{\mu}\frac{g}{H}}_{\omega_0^2} z = \left(\frac{\rho_e}{\mu} - 1\right) g$

Osill harmonique de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu H}{\rho_e g}}$.

de solutions $z = a \cos \omega_0 t + z_{eq}$

$\Rightarrow v = a\omega_0 \sin \omega_0 t \Rightarrow v_{max} = a\omega_0$

Equilibre d'1 flotteur



A l'équilibre, $P = \Pi$

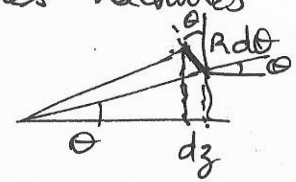
$\Leftrightarrow \mu \frac{\pi R^2}{2} H g = \rho_e V_i g$

On doit donc calculer le volume immergé V_i par intégration

On somme les volumes élémentaires hachurés

$dV = 2R \sin\theta \, H \, dz$

or $dz = R d\theta \sin\theta$



Entre $\theta = 0$ et θ_{max} tel que $\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}$

Soit $V_i = \int_0^{\pi/3} H \times 2R^2 \sin^2 d\theta$

$= \int_0^{\pi/3} H \times \cancel{2} R^2 \frac{(1 - \cos 2\theta)}{\cancel{2}} d\theta = HR^2 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}$

$= HR^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

L'équilibre s'écrit donc

$\frac{\mu \pi}{2} = \rho_e \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{\mu = \rho_e \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)}$