

Corrigé proposé par Charles-Édouard LECOMTE. Relu attentivement par Christophe BLOND-BUTLEN.

I Vitesse des gouttes de pluie

Q1. Un référentiel est l'ensemble constitué :

- d'un **solide** par rapport auquel on décrit le mouvement. On y fixe un point O, origine d'un repère cartésien ;
- d'une **horloge** paramétrant le temps.

Il est galiléen s'il vérifie le principe d'inertie : un point matériel soumis à aucune action mécanique est soit au repos, soit animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Le poids d'une goutte est l'action de la Terre sur celle-ci. Il s'exprime ainsi :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho \left(\frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right) g\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\pi\rho D^3 g}{6} \vec{e}_z}$$

Q2. D'une part :

$$\left[\overrightarrow{F_{\text{frott}}} \right] = [m] \times [\vec{a}] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} [-C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z] &= [-C] \times [\pi] \times [\rho_a] \times [D]^2 \times [v]^2 \times [\vec{e}_z] \\ &= 1 \times 1 \times \text{M} \cdot \text{L}^{-3} \times \text{L}^2 \times \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2} \times 1 \\ &= \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \end{aligned}$$

Nous avons démontré que $\left[\overrightarrow{F_{\text{frott}}} \right] = [-C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z]$: **la formule est bien homogène.**

Q3. Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à la goutte, assimilée à un point matériel, dans le référentiel terrestre. Nous utilisons le vecteur \vec{e}_z proposé par l'énoncé. Comme indiqué, le poids et la force de frottement fluide s'appliquent sur la goutte ainsi :

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \overrightarrow{F_{\text{frott}}}$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte $\vec{a} = \vec{0}$ (en effet $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \text{cte}$). D'où, d'après les expressions Q1 et Q2 :

$$\vec{0} = \frac{\pi\rho D^3 g}{6} \vec{e}_z - C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z = \vec{0}$$

On identifie v_{lim} par projection sur l'axe \vec{e}_z :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}} \sqrt{D}$$

puis $\vec{v}_{\text{lim}} = v_{\text{lim}} \vec{e}_z$, on identifie :

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z}$$

Application numérique : $K = 144 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi :

- pour $D = 1 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 4,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $D = 3 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $D = 5 \text{ mm}$: $v_{\text{lim}} = 10,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q4. Nous pouvons lister plusieurs phénomènes :

- les gouttes de grande taille se déforment sous l'effet de la force de traînée, ainsi le coefficient géométrique entre la surface frontale et le volume de la goutte évolue ;
- (HP) les gouttes de petite taille correspondent à un nombre de Reynolds plus petit, où le coefficient de traînée peut être différent. Pour $D < 1 \text{ mm}$, l'évolution de v_{lim} en fonction de D semble être linéaire, indiquant davantage une force de frottement type Stokes ($\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -AD\vec{v}$).

II Disdromètre à impact avec platine

Q5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la platine dans le référentiel du support (galiléen) dans une situation statique. On utilise le repère proposé par l'énoncé. Sur la platine s'exercent :

— son poids :

$$\vec{P} = Mg\vec{e}_z$$

— la force de frottement :

$$\vec{f} = -\lambda \overrightarrow{v_{\text{platine}}} = \vec{0}$$

car on traite une situation statique ;

— la force de rappel du ressort :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{e}_z$$

en effet, si le ressort est étendu (soit $\ell - \ell_0 > 0$), alors la force est vers le bas ;

— la force d'impact de la goutte $\vec{F}(t) = \vec{0}$ (il n'y a pas d'impact dans cette situation).

Ainsi, appliquons le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{0} = Mg\vec{e}_z + \vec{0} + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{e}_z + \vec{0}$$

En projetant sur \vec{e}_z :

$$Mg + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

Q6. Reprenons la même étude, dans une situation non-statique :

— le mouvement étant limité à une translation sur l'axe z , l'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{e}_z$$

— le poids est inchangé ;

— la force de frottement est :

$$\vec{f} = -\lambda \overrightarrow{v_{\text{platine}}} = -\lambda \frac{dZ}{dt}\vec{e}_z$$

— la force de rappel du ressort est :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = +k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$$

or $Z = \ell_{\text{éq}} - \ell$ par définition d'où :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = k(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0)\vec{e}_z$$

Ainsi :

$$M \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{e}_z = Mg\vec{e}_z - \lambda \frac{dZ}{dt}\vec{e}_z + k(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0)\vec{e}_z + F(t)\vec{e}_z$$

or $Mg + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$ d'après la question précédente donc, en projetant sur \vec{e}_z :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\lambda}{M} \frac{dZ}{dt} + \frac{k}{M}Z = F(t)$$

On identifie :

$$\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{M}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \frac{k}{M}} \quad \text{de sorte que} \quad \boxed{\frac{d^2Z}{dt^2} + \gamma \frac{dZ}{dt} + \beta Z = \frac{F(t)}{M}}$$

Q7. τ correspond à la durée d'impact de la goutte sur la platine (ainsi l'accélération subie est de l'ordre de v_{lim}/τ). Cela correspond à l'intervalle de temps séparant l'impact de la tête de la goutte et l'impact de sa queue. Ainsi, si sa vitesse n'évolue pas au cours de l'impact $v_{\text{lim}}\tau = D$ d'où :

$$\boxed{\tau \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}}$$

Or $v_{\text{lim}} = K\sqrt{D}$ d'où, avec le facteur correctif proposé par l'énoncé :

$$\boxed{\tau = \xi \frac{\sqrt{D}}{K} = 2,2 \times 10^{-4} \text{ s} = 0,22 \text{ ms}}$$

Q8.a) La réponse du disdromètre est la plus rapide si le facteur de qualité vaut 1/2. Or :

$$\omega_0^2 = \beta \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \gamma$$

Si $Q = 1/2$, alors $\omega_0 = \gamma/2$ d'où :

$$\boxed{\frac{\gamma^2}{4} = \beta}$$

Q8.b) On cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \gamma \frac{dZ}{dt} + \frac{\gamma^2}{4}Z = \frac{F_0}{M}$$

avec les conditions initiales $Z(0) = 0$ et $\frac{dZ}{dt}(0) = 0$. Résolvons d'abord l'équation homogène. Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \gamma r + \frac{\gamma^2}{4} = 0$$

il possède une racine double $r_0 = -\gamma/2$. La solution de l'équation homogène est donc :

$$Z(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration. Une solution particulière de cette équation est $Z(t) = \frac{4F_0}{M\gamma^2}$ (en effet, dans ce cas les dérivées sont nulles d'où le résultat). Or :

$$\frac{4}{M\gamma^2} = \frac{1}{\beta M} = \frac{1}{k}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} + (At + B) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

Cherchons A et B en utilisant les conditions initiales.

$$Z(0) = \frac{F_0}{k} + B$$

donc, comme $Z(0) = 0$, $B = -\frac{F_0}{k}$. Ensuite :

$$\frac{dZ}{dt}(t) = 0 + A \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) + (At + B) \left(-\frac{\gamma}{2} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)$$

soit :

$$\frac{dZ}{dt}(0) = A - \frac{\gamma B}{2}$$

ainsi $A = \gamma B/2$ finalement :

$$\boxed{Z(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \left(\frac{\gamma t}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)}$$

Q8.c) Il faut $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$ soit :

$$\left(\frac{\gamma \tau}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{\gamma \tau}{2}\right) = 0$$

γ et τ étant positifs, il est impossible que $\frac{\gamma \tau}{2} + 1$ soit nul. Si $\boxed{\frac{\gamma \tau}{2} \gg 1}$, alors

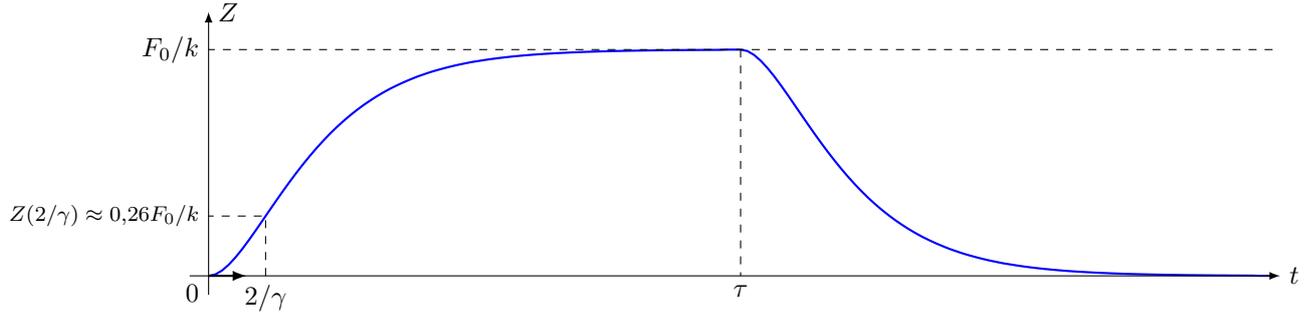
$$\exp\left(-\frac{\gamma \tau}{2}\right) \ll 1$$

et on peut écrire $\boxed{Z(\tau) = \frac{F_0}{k}}$ Ainsi :

$$Z(\tau) = \frac{\pi \rho D^3}{6} \frac{K \sqrt{D}}{\xi \sqrt{D}} \frac{1}{k} = \frac{\pi \rho}{6} \frac{K^2}{\xi k} D^3$$

On a démontré le résultat demandé avec $\boxed{\alpha = 3}$

Q8.d) Pour $\tau < t < 2\tau$, on observe la relaxation du plateau vers sa position d'équilibre sans force, sur un même temps typique :



Q8.e) Le coefficient de proportionnalité entre Z et D^3 est $\frac{\pi\rho K^2}{6 \epsilon_k}$ ne dépend pas de la goutte. La connaissance de ces différents coefficients ou un étalonnage permet de relier Z à D .

III Disdromètre à impact avec piézoélectrique

Q9. On suppose les plans infinis : le plan contenant M et les vecteur \vec{e}_x et \vec{e}_z , comme celui contenant M , \vec{e}_y et \vec{e}_z , sont tout deux plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique en M appartient donc à ces deux plans ainsi :

$$\vec{E} = E(M)\vec{e}_z$$

Le système est invariant par toute translation suivant les vecteurs horizontaux : le champ électrique ne dépend que de la coordonnée z :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$$

On a donc montré que l'on peut écrire : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$

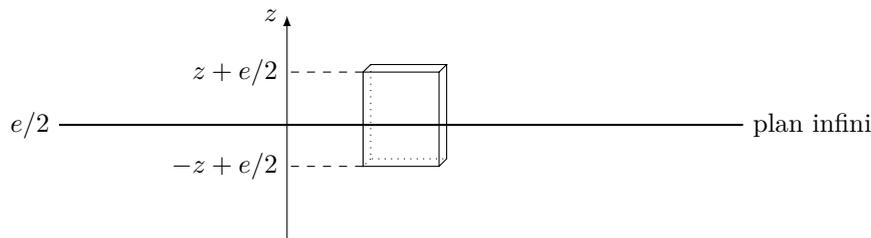
Q10. On utilise le théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Q_{int} est la charge contenue dans un volume V délimité par une surface fermée S , ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide.

On considère comme surface de Gauss un parallélépipède vertical de section horizontale S , dont l'extension verticale va de $-z + e/2$ à $z + e/2$. La symétrie du système permet d'écrire :

$$E\left(z + \frac{e}{2}\right) = -E\left(-z + \frac{e}{2}\right)$$



Calcul du flux : l'intégrale

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

peut se décomposer en trois parties :

1. le flux sur les faces latérales : il est nul car le vecteur surface $d\vec{S}$ est horizontal tandis que \vec{E} est vertical (d'après **Q9**) ;
2. le flux sur la surface du bas : le vecteur surface, sortant, est $d\vec{S} = -dS\vec{e}_z$ donc :

$$\iint_{S_{\text{bas}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(-z + e/2)S = E(z + e/2)S$$

3. le flux sur la surface du haut : le vecteur surface, sortant, est $\vec{dS} = dS\vec{e}_z$ donc :

$$\iint_{S_{\text{haut}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E(z + e/2) S$$

Finalement :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = 2E(z + e/2) S$$

Charge intérieure : C'est simplement σS , où σ est la charge surfacique. Donc :

$$E(z > e/2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

En utilisant les données de l'énoncé $\sigma = Q/S$ soit :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > e/2 \\ -\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z < e/2 \end{cases}$$

Q11. On applique le principe de superposition. Le champ créé par la face du bas, de charge $-Q$ est :

$$\vec{E}_{\text{bas}}(M) = \begin{cases} -\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > -e/2 \\ \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z < -e/2 \end{cases}$$

On somme les deux champs :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(M) = \begin{cases} -\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z + \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0} & \text{si } z > e/2 \\ -\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z - \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{Q}{S\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } -e/2 < z < e/2 \\ \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z - \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0} & \text{si } z < -e/2 \end{cases}$$

S'il y avait du vide, le champ électrique entre les deux électrodes serait :

$$\vec{E}(M) = -\frac{Q}{S\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

Ainsi, à l'intérieur du matériau piézoélectrique :

$$\vec{E}(M) = -\frac{Q}{S\varepsilon} \vec{e}_z$$

Q12. Le potentiel est $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ soit :

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Q}{S\varepsilon}$$

Ainsi :

$$V(z) = \frac{Q}{S\varepsilon} z + V_0$$

On a alors :

$$u = V\left(\frac{e}{2}\right) - V\left(-\frac{e}{2}\right) = \frac{Qe}{S\varepsilon}$$

Q est proportionnel à F : notons Γ le coefficient de proportionnalité ainsi :

$$u = \frac{\Gamma e}{\varepsilon S} F_0$$

Or :

$$F_0 = \frac{\rho\pi D^3}{6} \frac{K\sqrt{D}}{\xi\sqrt{D}} = \frac{\rho\pi K^2}{6\xi} D^3$$

Soit :

$$u = \frac{\Gamma e}{\varepsilon S} \frac{\rho\pi K^2}{6\xi} D^3$$

U est bien proportionnel à D^3 .

IV Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

Q13. Pendant une durée τ , ce sont les gouttes contenues dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}}\tau$ de surface S qui vont frapper le disdromètre. Leur nombre est $N \times S v_{\text{lim}}\tau$. D'où :

$$G = NS\xi D$$

On veut $G < 1$ soit $S < \frac{1}{N\xi D}$:

$$S_{\text{max}} = \frac{1}{N\xi D}$$

Q14. Pour estimer la taille moyenne des gouttes, on somme les produits du nombre de goutte de taille D (soit $n(D)dD$) par leur taille, et on divise par le nombre total de gouttes. Dans la distribution continue, cela s'exprime sous la forme d'une intégrale :

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} D n(D) dD}{\int_0^{+\infty} n(D) dD}$$

Ainsi :

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} D n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD}{\int_0^{+\infty} n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD}$$

On effectue le changement de variable $x = D/D_0$:

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} x D_0 n_0 \exp(-x) D_0 dx}{\int_0^{+\infty} n_0 \exp(-x) D_0 dx} = \frac{D_0^2 n_0 \int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx}{D_0 n_0 \int_0^{+\infty} \exp(-x) dx}$$

Or $\int_0^{+\infty} \exp(-x) dx = [-\exp(-x)]_0^{+\infty} = 1$ et d'après l'énoncé $\int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx = 1$ ainsi, on a bien montré que :

$$\langle D \rangle = D_0$$

Q15. Une goutte de rayon D frappe le disdromètre si elle est dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}}\tau = \xi D$. Ainsi :

$$G = \int_0^{+\infty} \xi D S n(D) dD = \xi S \int_0^{+\infty} D n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

Nous avons déjà calculé cette intégrale :

$$G = D_0^2 n_0 \xi S$$

La condition $G < 1$ permet d'écrire :

$$S_{\text{max}} = \frac{1}{D_0^2 n_0 \xi}$$

Application numérique : $D_0 = 1,5 \times 10^{-3}$ m, $n_0 = 8 \times 10^6$ m⁻⁴ et $\xi = 6,5$:

$$S_{\text{max}} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 85 \text{ cm}^2$$

La photo 2 montre une platine circulaire de diamètre 10 cm soit une surface d'environ 80 cm² : le dimensionnement est correct.

Q16. Le cadre est le même que celui de la Q13. Pendant dt , le nombre de gouttes qui frappent la surface est le nombre de goutte dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}}(D_0) dt$ soit $NS v_{\text{lim}}(D_0) dt$. Le volume d'une goutte est $\pi D_0^3/6$. Par unité de surface et de temps :

$$R = N \frac{\pi D_0^3}{6} v_{\text{lim}}(D_0)$$

Q17. En général, le volume lié au gouttes de diamètre compris entre D et $D + dD$ est :

$$n(D)dD \times S v_{\text{lim}}(D) dt \times \frac{\pi D^3}{6}$$

- $n(D)dD$ est le nombre de gouttes de rayon compris entre D et $D + dD$ par unité de volume ;
- $S v_{\text{lim}}(D) dt$ est le volume du cylindre contenant ces gouttes qui vont frapper la surface S pendant dt ;
- $\pi D^3/6$ est le volume d'une goutte de rayon D .

Ainsi, par unité de surface et de temps :

$$R = \int_0^{+\infty} n(D) dD v_{\text{lim}}(D) \times \frac{\pi D^3}{6}$$

Ainsi :

$$R = \int_0^{+\infty} K \sqrt{D} \frac{\pi D^3}{6} n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

On effectue le changement de variable $x = D/D_0$:

$$R = \int_0^{+\infty} K D_0^{4,5} n_0 \frac{\pi}{6} x^{3,5} \exp(-x) dx$$

$$R = K D_0^{4,5} n_0 \frac{\pi}{6} I \quad \text{où} \quad I = \int_0^{+\infty} x^{3,5} \exp(-x) dx \approx 11,6$$

Application numérique : $D_0 = 1,5 \times 10^{-3}$ m, $n_0 = 8 \times 10^6$ m⁻⁴ et $K = 150$ m^{1/2} · s⁻¹ :

$$R = 1,4 \text{ mm/s}$$

Soit $5,1 \times 10^3$ mm/h : ce résultat est gigantesque...

Q18. Cet histogramme nous donne la répartition des tailles de goutte (la première barre correspond à $0 < D < 0,1$ mm, la seconde à $0,1 \text{ mm} < D < 0,2$ mm, etc.). Il paraît difficile d'estimer n_0 , mais on peut simplement calculer le volume correspondant à chaque barre :

$$V_i = N_i \times V(D)$$

où $V(D)$ est le volume moyen d'une goutte. On peut écrire :

$$V(D) = \frac{1}{\delta D} \int_{D-\frac{\delta D}{2}}^{D+\frac{\delta D}{2}} \frac{\pi D^3}{6} dD$$

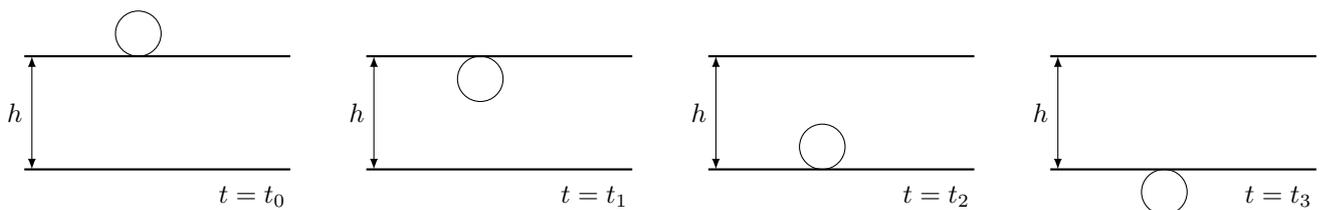
en supposant la répartition des diamètres homogène sur l'intervalle $[D - \frac{\delta D}{2}; D + \frac{\delta D}{2}]$. Il reste à sommer les différents volumes associés à chaque taille de goutte pour conclure.

V Disdromètre optique

Q19. On peut placer un **filtre passe-haut** dont la pulsation de coupure serait bien inférieure à la pulsation fondamentale de $I(t)$.

Pour inverser la tension, on peut imaginer un montage inverseur utilisant un ALI (HP).

- Q20.** — De t_0 à t_1 , la goutte entre dans la zone de hauteur h ;
 — de t_1 à t_2 , la goutte est contenue entièrement dans la zone de hauteur h ;
 — de t_2 à t_3 , la goutte en sort complètement.



La goutte parcourt une hauteur h entre t_0 et t_2 (ou entre t_1 et t_3). Ainsi :

$$v = \frac{h}{t_2 - t_0} = \frac{h}{t_3 - t_1} = 6,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q21. L'intensité occultée par la goutte est proportionnelle à sa surface $I(t) = \alpha S(t)$. Ainsi $I_{\text{max}} = \alpha S_{\text{max}}$. Puis :

$$e(t) = k(I_0 - \alpha S_{\text{max}})$$

Après le bloc d'élimination de la composante continu, il reste $-k\alpha S_{\text{max}}$; puis, après l'inversion $k\alpha S_{\text{max}}$. Finalement, après extraction de la racine carrée :

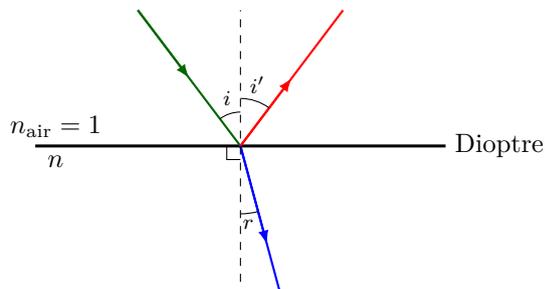
$$s_{\text{max}} = \sqrt{k\alpha S_{\text{max}}} = \sqrt{\frac{k\alpha\pi}{4}} D$$

$$s_{\text{max}} = K' D$$

Q22. La mesure de s_{max} indique D et celle de $t_2 - t_0$ indique v_{lim} : il n'y a pas besoin d'hypothèses sur la force subie par la goutte.

VI Théorie géométrique de l'arc en ciel

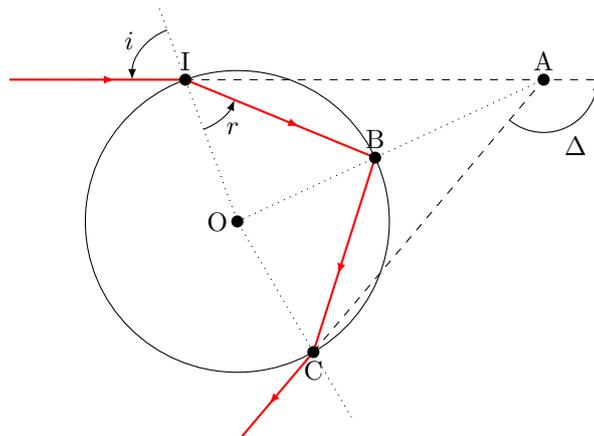
Q23. Sur le schéma :



- Les rayons réfléchis et réfractés appartiennent au plan d'incidence.
- L'angle de réfraction r et l'angle d'incidence i sont reliés par la relation

$$n_{\text{air}} \sin(i) = n \sin(r)$$

Q24. Sur le schéma :



Le triangle OIB est isocèle en O (OI et OB sont deux rayons) ainsi $\widehat{OIB} = \widehat{IBO} = r$ donc $\widehat{BOI} = \pi - 2r$.
Dans le triangle AOI :

$$\widehat{OAI} + \widehat{AOI} + \widehat{OIA} = \pi$$

donc $\widehat{OAI} = \pi - (\pi - 2r) - i = 2r - i$. Ainsi $\widehat{CAI} = 2\widehat{OAI} = 4r - 2i$. Finalement :

$$\Delta = \pi - \widehat{CAI} = \pi - 4r + 2i$$

Or $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)$ ainsi :

$$\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2 \arcsin(x)$$

Q25. On cherche la valeur x_m de x annulant $\frac{d\Delta}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dx} &= 0 - 4 \left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2\sqrt{n^2 - x_m^2} = 4\sqrt{1 - x_m^2}$$

On isole x_m :

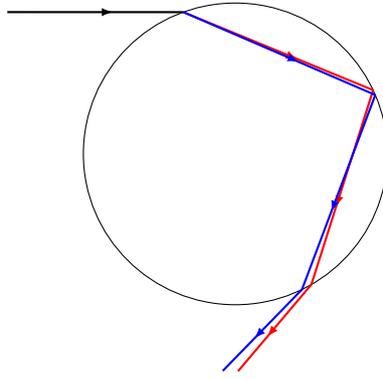
$$n^2 - x_m^2 = 4 - 4x_m^2 \quad \text{soit} \quad x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Q26. On observe d'après la figure 8 qu'il existe un intervalle d'angle autour de 60° pour lequel Δ est constant, autour de 138° : tous les rayons arrivant à cette incidence sont renvoyés dans des directions très proches.

Q27. — bleu/indigo : pour $n = 1,343$, $x_m = 0,8556$ et $\Delta_m = 139,4^\circ$

— rouge : pour $n = 1,330$, $x_m = 0,8624$ et $\Delta_m = 137,5^\circ$

Q28. L'angle Δ pour le rouge est plus petit que pour le bleu. Sur le schéma :



Les rayons bleus sont moins inclinés par rapport à l'horizontale que les rouges. Le rouge est vu à l'extérieur et le bleu à l'intérieur.

VII Théorie ondulatoire de l'arc en ciel

Q29.a) Pour la lumière visible, ω va de $2,5 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ à $5 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q29.b) On moyenne sur une durée bien supérieure à la période de l'onde électromagnétique (typiquement un temps plus grand que $1 \mu\text{m}$).

Q29.c) On considère l'interférence entre les deux ondes écrites dans l'énoncé. Le champ total est :

$$s(\text{P}, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

L'intensité lumineuse est $I = K \langle s^2(\text{P}, t) \rangle$. Pour exprimer l'intensité, on développe :

$$K \langle s^2(\text{P}, t) \rangle = \underbrace{K \langle s_1^2(\text{P}, t) \rangle}_{I_1} + \underbrace{K \langle s_2^2(\text{P}, t) \rangle}_{I_2} + K \langle 2s_1(\text{P}, t)s_2(\text{P}, t) \rangle$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \langle 2s_1(\text{P}, t)s_2(\text{P}, t) \rangle &= \langle 2a_1 a_2 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2) \rangle \\ &= a_1 a_2 \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - k_1 x_1 - k_2 x_2 + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle + a_1 a_2 \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2) \rangle \end{aligned}$$

On a utilisé :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

La valeur moyenne d'un cosinus est nulle et comme :

$$I_1 = \frac{K a_1^2}{2} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{K a_2^2}{2} \quad \text{alors} \quad 2\sqrt{I_1 I_2} = K a_1 a_2$$

Ainsi :

$$I(\text{P}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2) \rangle$$

Cet terme est non nul à condition d'avoir $\omega_1 = \omega_2$ (sources synchrones) et $\varphi_1 - \varphi_2$ constant (sources cohérentes temporellement).

Q29.d) On a alors $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ et $k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$. On peut écrire :

$$I(\text{P}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{\omega}{c} (n_1 x_1 - n_2 x_2)\right)$$

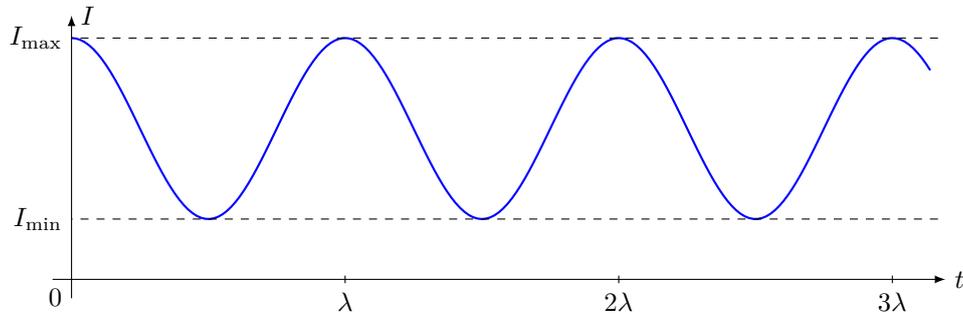
Or $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$ ainsi on identifie :

$$\delta(\text{P}) = n_1 x_1 - n_2 x_2 \quad \text{de sorte que} \quad I(\text{P}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\text{P})\right)$$

Q30. Il y a une oscillation entre :

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

avec une période de λ .



Sur la photographie, on observe des franges sombres, indiquant que $I_{\min} \approx 0$ soit $I_1 = I_2$

Q31. On observe les interférences dans le plan focal d'une lentille (cela peut-être la rétine de l'observateur ou le capteur photo d'un appareil).

Q32. Il y a des interférences constructives si $\delta = p\lambda$. L'écart entre deux franges est tel que :

$$D(\cos(i_{2,p+1}) - \cos(i_{1,p+1})) - 2Dn(\cos(r_{2,p+1}) - \cos(r_{1,p+1})) - D(\cos(i_{2,p}) - \cos(i_{1,p})) + 2Dn(\cos(r_{2,p}) - \cos(r_{1,p})) = \lambda$$

Si D est plus grand, l'écart angulaire Δi ou Δr sera **plus petit**.

Q33. On cherche D tel que :

$$D(\cos(i_2) - \cos(i_1)) - 2Dn(\cos(r_2) - \cos(r_1)) = -2\lambda$$

Soit :

$$D = \frac{2\lambda}{2n(\cos(r_2) - \cos(r_1)) - (\cos(i_2) - \cos(i_1))}$$

Application numérique :

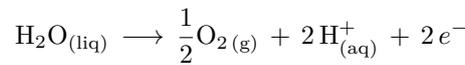
— $i_1 = 50,13^\circ$ donc $r_1 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(i_1)\right) = 35,25^\circ$

— $i_2 = 67,98^\circ$ donc $r_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(i_2)\right) = 44,19^\circ$

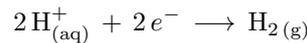
soit $D = 1,357 \text{ mm}$

VIII Valorisation des eaux de pluie par électrolyse en ligne

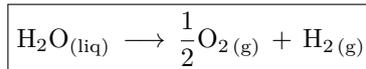
Q34. Lors de l'électrolyse de l'eau pure, on oxyde l'eau en dioxygène à l'anode :



et on réduit l'eau en dihydrogène à la cathode :



Le bilan est :



Q35. Pour le couple $\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_{2(\text{g})}$:

$$E_1 = E^\circ \left(\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_{2(\text{g})} \right) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p^\circ \times [\text{H}^+]^2}{p_{\text{H}_2}} \right)$$

Pour le couple $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$

$$E_2 = E^\circ \left(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})} \right) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p_{\text{O}_2}^{1/2} \times [\text{H}^+]^2}{(p^\circ)^{1/2}} \right)$$

À l'équilibre chimique, le potentiel de la solution est unique ainsi $E_1 = E_2$ d'où :

$$E^\circ \left(\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_{2(\text{g})} \right) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p^\circ \times [\text{H}^+]_{\text{eq}}^2}{p_{\text{H}_2,\text{eq}}} \right) = E^\circ \left(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})} \right) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p_{\text{O}_2,\text{eq}}^{1/2} \times [\text{H}^+]_{\text{eq}}^2}{(p^\circ)^{1/2}} \right)$$

$$E^\circ \left(\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_{2(\text{g})} \right) - E^\circ \left(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})} \right) = \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p_{\text{O}_2,\text{eq}}^{1/2} \times [\text{H}^+]_{\text{eq}}^2}{(p^\circ)^{1/2}} \right) - \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p^\circ \times [\text{H}^+]_{\text{eq}}^2}{p_{\text{H}_2,\text{eq}}} \right)$$

Or :

$$\frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p_{\text{O}_2, \text{eq}}^{1/2} \times [\text{H}^+]_{\text{eq}}^2}{(p^\circ)^{1/2}} \right) - \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{p^\circ \times [\text{H}^+]_{\text{eq}}^2}{p_{\text{H}_2, \text{eq}}} \right) = 0,03 \log \left(\left(\frac{p_{\text{O}_2, \text{eq}}}{p^\circ} \right)^{1/2} \times \frac{p_{\text{H}_2, \text{eq}}}{p^\circ} \right) = 0,03 \log(K^\circ)$$

$$K^\circ = 10^{\frac{E^\circ(\text{H}^+_{(\text{aq})}/\text{H}_2(\text{g})) - E^\circ(\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{liq}))}{0,03}} = 10^{-41}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= -RT \ln(K^\circ) = -\ln(10) RT \log(K) \\ &= -RT \ln(10) \left(\frac{E^\circ(\text{H}^+_{(\text{aq})}/\text{H}_2(\text{g})) - E^\circ(\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{liq}))}{\frac{RT \ln(10)}{2\mathcal{F}}} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta_r G^\circ = 2\mathcal{F} \left(E^\circ(\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{liq})) - E^\circ(\text{H}^+_{(\text{aq})}/\text{H}_2(\text{g})) \right) = 2,37 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Q36. D'après la loi de Hess :

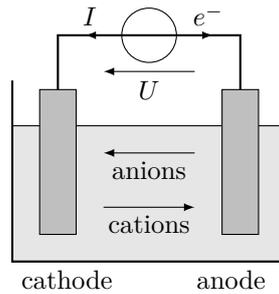
$$\Delta_r H^\circ = \frac{1}{2} \Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})) + \Delta_f H^\circ(\text{H}_2(\text{g})) - \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{liq}))$$

D'après les données de l'énoncé :

$$\Delta_r H^\circ = 285,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La réaction est endothermique, d'après la loi de Hess, il serait a priori préférable de la faire à haute température (mais étant donnée la valeur de $\Delta_r H^\circ$, ça ne suffira pas à rendre la réaction équilibrée).

Q37. Schéma :



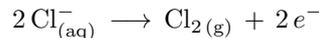
Q38. Il faut au moins imposer une tension $U_{\min} = \Delta E = 1,23 \text{ V}$.

Q39. La courbe aux courants négatifs correspond à la réduction de l'eau en dihydrogène; celle aux courants positifs à l'oxydation de l'eau en dioxygène. D'après les surtensions données :

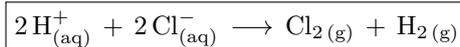
$$U_{\min} = \Delta E_{\text{Nernst}} + \eta_a - \eta_c = 2,07 \text{ V}$$

Q40. L'eau pure est peu conductrice : la résistance de l'ensemble est importante et empêche le passage de forts courants.

Q41. Il n'y a aucun risque de réduire Na^+ ($E^\circ = -2,71 \text{ V}$: on rencontre le mur du solvant bien avant). Étant donné la surtension importante du couple $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$, on peut oxyder l'ion chlorure en dichlore pour une tension plus faible. La demi-équation correspondante est :



La demi-équation de réduction est la même, l'équation-bilan est donc :



Q42. En une heure, une charge $Q = I \Delta t = 3,6 \times 10^4 \text{ A}$ circule, soit une quantité de matière d'électrons :

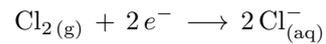
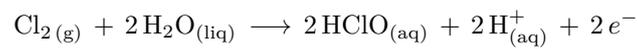
$$n_{e^-} = \frac{I \Delta t}{\mathcal{F}}$$

Pour un ion chlorure oxydé, un électron circule, la quantité d'ions chlorure oxydé est donc $n_{\text{Cl}^-} = n_{e^-}$. Un ion chlorure correspond à une entité NaCl soit $n_{\text{NaCl}} = n_{\text{Cl}^-} = n_{e^-}$. Finalement, la masse de chlorure de sodium est :

$$m = M(\text{NaCl}) \frac{I \Delta t}{\mathcal{F}} = 21,8 \text{ g}$$

Il faut 100 g par mètre cube donc on peut traiter $\boxed{218 \text{ L d'eau}}$ en une heure.

Q43. Les demi-équations sont :



Le bilan est donc :



(en solution, l'acide chlorhydrique est présents sous la forme des ions $\text{H}_{(\text{aq})}^+ + \text{Cl}_{(\text{aq})}^-$). C'est une réaction **rédox** (une dismutation) : le nombre d'oxydation du chlore passe de 0 dans $\text{Cl}_2(\text{g})$ à -I dans HCl , et à +I dans $\text{HClO}(\text{aq})$.