

1 Sommes

Définition 1 : Somme

On peut définir les sommes par la relation de récurrence suivante :

$$\text{pour } p \geq n, \quad \sum_{k=n}^{p+1} a_k = a_{p+1} + \sum_{k=n}^p a_k$$

et l'initialisation :

$$\sum_{k=n}^n a_k = a_n$$

Propriété 1 : Linéarité

Pour $n \leq p$

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=n}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=n}^p a_k + \sum_{k=n}^p b_k \\ & \bullet \sum_{k=n}^p (\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=n}^p a_k \\ & \bullet \sum_{k=n}^p C = (p - n + 1) \cdot C \quad \text{où } C \text{ est indépendant de l'indice } k \end{aligned}$$

Propriété 2 : Produit et factorisation

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=n}^p a_k \right) \left(\sum_{k=q}^r b_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=n}^p a_k \right) \left(\sum_{j=q}^r b_j \right) \quad \text{changement d'indice indispensable !} \\ &= \sum_{k=n}^p \sum_{j=q}^r a_k \cdot b_j \\ &= \sum_{\substack{n \leq k \leq p \\ q \leq j \leq r}} a_k \cdot b_j \end{aligned}$$

Propriété 3 : Carré d'une somme

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^p a_k \right)^2 = \sum_{\substack{n \leq i \leq p \\ n \leq j \leq p}} a_i \cdot b_j = \sum_{k=n}^p a_k^2 + 2 \sum_{n \leq i < j \leq p} a_i a_j \right.$$

C'est « la somme des carrés plus les doubles produits »

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Propriété 4 : Inégalité triangulaire généralisée

$$\left\| \left| \sum_{k=n}^p a_k \right| \leq \sum_{k=n}^p |a_k| \right.$$

Propriété 5 : Télescopage

$$\left\| \sum_{k=n}^p (a_{k+1} - a_k) = a_{p+1} - a_n \right.$$

Propriété 6 : Sommes tronquées (troncature)

$$\left\| \begin{aligned} \sum_{k=n}^p a_k &= \sum_{k=0}^p a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ \text{ou encore} \\ \sum_{k=0}^p a_k &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^p a_k \end{aligned} \right.$$

Changements d'indices

Deux types de changements possibles : $k' = k + c, \quad k' = -k + c$

où c est une constante entière indépendante de l'indice

Par exemple : $k' = k + 1 \quad k' = n - k$

Changements **interdits** du style : $k' = 2k, \quad k' = 2k + 1 \dots$

Exemple 1 : $S_n = \sum_{k=0}^n (n-k+1)^3$

On pose $j = n-k+1 \iff k = n-j+1$ bornes : $\begin{cases} k = n & j = 1 \\ k = 0 & j = n+1 \end{cases}$

$$T_n = \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Exemple 2 : $T_n = \sum_{k=n}^{2n} k^2$

On pose $k = j+n \iff j = k-n$ bornes : $\begin{cases} k = 2n & j = n \\ k = n & j = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{j=0}^n (j+n)^2 \\ &= \sum_{j=0}^n (j^2 + 2jn + n^2) \\ &= \sum_{j=0}^n j^2 + 2n \sum_{j=0}^n j + \sum_{j=0}^n n^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)n^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(n+1)n^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{6} [(2n+1) + 12n] \\ &= \frac{n(n+1)(14n+1)}{6} \end{aligned}$$

Vérif :

pour $n = 1$ $S_1 = 1 + 4 = 5$ $\frac{n(n+1)(14n+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 15}{6} = 5$

pour $n = 2$ $S_2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $\frac{n(n+1)(14n+1)}{6} = \frac{2 \times 3 \times 29}{6} = 29$

Remarque : on peut aussi le faire par troncature

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=n}^{2n} k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{2n} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n}{6} [2(2n+1)(4n+1) - (n-1)(2n-1)] \\ &= \frac{n}{6} [2(8n^2 + 6n + 1) - (2n^2 - 3n + 1)] \\ &= \frac{n}{6} [14n^2 + 15n + 1] \quad -1 \text{ racine évidente : on factorise par } n+1 \\ &= \frac{n}{6} [(n+1)(14n+1)] \end{aligned}$$

Permutation des sommes doubles

- Indices indépendants : pas de problèmes.

$$\sum_{j=n}^p \sum_{k=q}^r a_{j,k} = \sum_{\substack{n \leq j \leq p \\ q \leq k \leq r}} a_{j,k} = \sum_{k=q}^r \sum_{j=n}^p a_{j,k}$$

- Indices liées, **exemple 1** : $\sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k}$

On remarque que l'indice k (qui arrive dans la deuxième somme dépend de l'indice j de la première somme. On ne peut donc pas permuter directement les deux sommes.

Détaillons la procédure : il s'agit d'abord de réunir les conditions sur les indices en une seule série d'inégalité, puis de les séparer à nouveau en commençant par le premier indice que l'ont veut, ici k

§ Étape 1 : $S = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k}$

On exprime le parcours des indices sous forme d'inégalités : j va de 0

à n donc $0 \leq j \leq n$ et k va de j à n donc $j \leq k \leq n$ D'où

$$S = \sum_{0 \leq j \leq n} \sum_{j \leq k \leq n} a_{j,k}$$

On regroupe tout sous une seule somme :

$$S = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n}} a_{j,k}$$

§ Étape 2 : il s'agit maintenant de réunir les lignes d'inégalités en une seule équivalence. Or on a :

$$\begin{cases} 0 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n \end{cases} \iff 0 \leq j \leq k \leq n$$

A de stade, il est essentiel de **bien vérifier qu'il y a équivalence**, c'est-à-dire que « ca marche dans les deux sens ». Je peux passer de la partie gauche à la partie droite et aussi de la partie droite à la partie gauche.

$$S = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{j,k}$$

§ Étape 3 : on va maintenant vers l'inverse, on va « défusionner », en commençant par l'indice k

Celui ne peut pas dépendre de j (qui ne viendra qu'après). Donc $0 \leq k \leq n$

Ensuite, une fois que k est choisi, on aura : $0 \leq j \leq k$ D'où

$$0 \leq j \leq k \leq n \iff \begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq k \end{cases}$$

Donc

$$S = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq k}} a_{j,k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{0 \leq j \leq k} a_{j,k} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_{j,k}$$

On peut résumer tout le processus ainsi :

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n}} a_{j,k} = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq k}} a_{j,k} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_{j,k}$$

• Indices liées, **exemple 2** : $S = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j+1}^{n+1} a_{j,k}$

$$S = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j+1}^{n+1} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j+1 \leq k \leq n+1}} a_{j,k}$$

Petit problème ici : on a l'indice j qui apparaît sous deux formes j et $j+1$. On va donc transformer la deuxième ligne en soustrayant 1 :

$$S = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k-1 \leq n}} a_{j,k}$$

On peut maintenant fusionner :

$$= \sum_{0 \leq j \leq k-1 \leq n} a_{j,k}$$

Et défusionner en commençant par k

$$= \sum_{\substack{0 \leq k-1 \leq n \\ 0 \leq j \leq k-1}} a_{j,k}$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq n+1} \sum_{0 \leq j \leq k-1} a_{j,k}$$

$$\text{car } 0 \leq k-1 \leq n \iff 1 \leq k \leq n+1$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}$$

On peut résumer ainsi les calculs :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \sum_{k=j+1}^{n+1} a_{j,k} &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j+1 \leq k \leq n+1}} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq k-1 \leq n}} a_{j,k} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k-1 \leq n} a_{j,k} = \sum_{\substack{0 \leq k-1 \leq n \\ 0 \leq j \leq k-1}} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} \end{aligned}$$

2 Sommes particulières

2.1 suites arithmétiques

Définition 2 : Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété 7 : Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

Alors $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, u_p = u_n + r(p - n)$

Propriété 8 : Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si

il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + r.n$

Somme des termes d'une suite arithmétique :

(nombre de termes) $\times$ (moyenne des extrêmes)

- (u_n) arithmétique $\Rightarrow \sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$
- $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=p}^n k = (n - p + 1) \frac{n+p}{2}$

2.2 suites géométriques

Définition 3 : Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$$

Propriété 9 : Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q

Alors $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, u_p = q^{p-n}.u_n$

Propriété 10 : Suites géométriques

Une suite (u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si

il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a.q^n$

Somme des termes d'une suite géométrique (raison $q \neq 1$)

$$= (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nbre termes})}}{1 - \text{raison}}$$

$$= \frac{(\text{1}^{\text{er}} \text{ terme}) - (\text{1}^{\text{er}} \text{ terme qui n'y est pas})}{1 - \text{raison}}$$

- (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque $u_p q^{n-p+1} = u_{n+1}$

- $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{pour } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{pour } q = 1 \end{cases}$
- $\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} & \text{pour } q \neq 1 \\ n - p + 1 & \text{pour } q = 1 \end{cases}$

2.3 Autres formules

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Remarque : ces sommes peuvent aussi commencer à 0 car le terme de rang 0 est nul :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3 Produits

Définition 4 : Produit

On peut définir les sommes par la relation de récurrence suivante :

$$\text{pour } p \geq n, \quad \prod_{k=n}^{p+1} a_k = a_{p+1} \times \prod_{k=n}^p a_k$$

et l'initialisation :

$$\prod_{k=n}^n a_k = a_n$$

Propriété 11

$$\begin{aligned} & \bullet \prod_{k=n}^p C = C^{p-n+1} \\ & \bullet \prod_{k=n}^p (a_k \times b_k) = \prod_{k=n}^p a_k \times \prod_{k=n}^p b_k \\ & \bullet \prod_{k=n}^p (\lambda \cdot a_k) = \lambda^{p-n+1} \times \prod_{k=n}^p a_k \end{aligned}$$

Propriété 12 : Télescopage

$$\begin{aligned} & \text{Si } \forall k \in [[n, p]], a_k \neq 0 \\ & \prod_{k=n}^p \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{p+1}}{a_n} \end{aligned}$$

Propriété 13 : Somme et produit

$$\begin{aligned} & \text{Si } \forall k \in [[n, p]], a_k > 0 \\ & \ln \left(\prod_{k=n}^p a_k \right) = \sum_{k=n}^p \ln(a_k) \end{aligned}$$

4 Factorielle

Définition 5 : Factorielle (par récurrence)

- $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$

On a aussi pour $n \geq 1$, $n! = \prod_{k=1}^n k$

Propriété 14 : Deux formules intéressantes

$$\begin{aligned} & \bullet 2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = \prod_{k=1}^n (2k) = \prod_{k=1}^n 2 \prod_{k=1}^n k = 2^n \cdot n! \\ & \bullet 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) = \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$