5 Coefficients binomiaux

Définition 6 : coefficient binomial

Pour $0 \leq k \leq n$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Convention : pour $0 \leq n < k$, $\dbinom{n}{k} = 0$

Propriété 15

- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$
- $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$
- $\dbinom{n}{2} = \dbinom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Symétrie : Pour $0 \leq k \leq n$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
- Pour $1 \leq k \leq n$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$

Propriété 16 : Formule de Pascal

Pour $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

<u>Démonstration</u>

- Symétrie : $\dbinom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{n-k}$
- $\dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1} = \dfrac{n}{k} \cdot \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \dfrac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

- Formule de Pascal :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n!\ k}{(n-k+1)!\ (k-1)!k} + \frac{(n-k+1)\ n!}{(n-k+1)(n-k)!\ k!}$$

$$= \frac{n!\ k}{(n-k+1)!\ k!} + \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)!\ k!}$$

$$= \frac{n!\ (k+(n-k+1))}{(n-k+1)!\ k!}$$

$$= \frac{n!\ (n+1)}{(n-k+1)!\ k!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\ k!} = \binom{n+1}{k}$$

La formule de Pascal permet de construire le triangle éponyme donnant $\dbinom{n}{p}$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

6 Binôme de Newton

Propriété 17 : Binôme de Newton

$\forall (a,\ b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

<u>Démonstration</u> Montrons que pour tout $n \geq 0$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Par récurrence sur n.

- Initialisation :

  Pour $n = 0$

  $$(a+b)^0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k b^{0-k} = \binom{0}{0}a^0 b^0 = 1$$

  Pour $n = 1$

  $$(a+b)^1 = a+b \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \binom{1}{0}a^0 b^1 + \binom{1}{1}a^1 b^0 = b+a$$

- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 1$ donné

  On a $\quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

  D'où

  $$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b).(a+b)^n \\ &= (a+b).\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\ &= a.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

  Faisons un changement d'indice dans la première somme :

  $$k' = k+1 \iff k = k'-1, \quad \text{bornes : } \begin{cases} k = n & k' = n+1 \\ k = 0 & k' = 1 \end{cases}$$

  $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}a^{k'} b^{n+1-k'}$$

  Ce qui donne, en remplaçant k' par k :

  $$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

  On met à part les termes qui « dépassent » pour que les indices parcourent le même ensemble : $[[1, n]]$

  $$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0}a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{(n+1)-1}a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}\end{aligned}$$

  On peut maintenant regrouper les deux sommes et utiliser la formule de Pascal :

  $$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}\end{aligned}$$

  On constate que,

  - pour $k = 0$, $\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} = \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1-0} = b^{n+1}$
  - pour $k = n+1$, $\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} = \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} = a^{n+1}$

  On peut donc faire rentrer les deux termes restants dans la somme :

  $$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien la formule de Newton

La deuxième formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k} b^k$ s'obtient par changement d'indice :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

On pose $j=n-k \iff k=n-j$ Bornes : $\begin{cases} k=n & k=0 \\ j=0 & j=n \end{cases}$

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} a^{n-j} b^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$ en utilisant la formule de symétrie du binôme

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

CQFD

Propriété 18 : Exemples

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = (1+x)^n$

7 Identités remarquables

Attention : ces formules n'ont RIEN à voir avec le binôme de Newton

- **Factorisation par** $a-b$

  Cela ne marche que si l'expression s'annule pour $b=a$

  Exemples : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

  $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

  Cela se généralise de la façon suivante :

  $$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+a^{n-1}b^k+\cdots+b^n)$$

  $$=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k$$

- **Factorisation par** $a+b$

  Cela ne marche que si l'expression s'annule pour $b=-a$

  - Pour $n=2p$ pair

    Par exemple :

    $$a^6-b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$$

    Ce qui se généralise :

    $$a^{2p}-b^{2p}=(a+b)(a^{2p-1}-a^{2p-2}b+\cdots+(-1)^k a^{2p-1-k}b^k+\cdots-b^{2p-1})$$

    $$=(a-b)\sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k a^{2p-1-k}b^k$$

  - Pour $n=2p+1$ impair

    Par exemple :

    $$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

    Ce qui se généralise :

    $$a^{2p+1}+b^{2p+1}=(a+b)(a^{2p}-a^{2p-1}b+\cdots+(-1)^k a^{2p-k}b^k+\cdots+b^{2p})$$

    $$=(a+b)\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k a^{2p-k}b^k$$

Remarque :
$a^{2n}-b^{2n}$ est factorisable par $a-b$ et par $a+b$ c'est-à-dire par a^2-b^2 ce qui est clair si on pose $A=a^2$, $B=b^2$:

$$a^{2n}-b^{2n}=A^n-B^n=(A-B)(\ldots,\ )=(a^2-b^2)(\ldots,\ )$$